dr. ing. Augustin Câmpeanu

BAZELE MECANICII STRUCTURILOR



Editura U.T. PRES
Cluj-Napoca, 2002

CUPRINS

PREFAȚĂ

În sec. I î.H., teoreticianul arhitecturii antice Vitruviu, caracterizând calitățile pe care trebuia să le posede un arhitect al timpului său spunea: "... *să fie talentat și capabil de învățătură, căci nici talentul fără învățătură, nici învățătura fără talent, nu-l poate face pe artist desăvârșit. El trebuie să cunoască scrisul, să fie destoinic la desen, instruit în geometrie, să știe multe legende, să-i fi ascultat cu sârguință pe filozofi, să știe muzică, să nu ignoreze medicina, să cunoască soluțiile juristconsulților, să aibă cunoștințe de astrologie și de legile cerului.*"

Acest vast domeniu al cunoașterii, la vremea menționată, aparținea unei singure persoane *"meșterul constructor"* sau *arhitectul* (de la grecescul *arhitekton* = șeful constructor) care își asuma atât responsabilitatea concepției, cât și pe aceea a execuției.

Evantaiul calităților menționate de Vitruviu le găsim bine ilustrate și în Renaștere, personalități ca Brunelleschi, Michelangelo, Leonardo da Vinci etc fiind în același timp arhitecți, fizicieni, mecanici, pictori, sculptori, muzicieni și chiar poeți.

De remarcat însă că în aceste perioade construcțiile erau executate pe baza intuiției, a regulilor empirice și experienței acumulate și transmise din generație în generație.

Renașterea a introdus însă ceva nou, deosebit de important: experimentul intenționat în locul simplei observări, ca mijloc de studiu a elementelor naturii.

Totuşi, începuturile studiului sistematic al construcţiilor aparţin lui Galileo Galilei (1564 - 1642), care analizează pentru prima dată distribuţia tensiunilor într-o consolă, teoretic şi experimental.

Începând cu el, studiul construcţiilor progresează rapid, cunoştinţele empirice şi intuiţia unor oameni de excepţie fiind înlocuită treptat, treptat, cu formule şi calcule matematice mult mai precise. Ştiinţa acestora, comportarea construcţiilor şi elementelor de construcţie la acţiuni mecanice de orice fel devenind aşa-numita *latură tehnică* a procesului complex de realizare a unei construcţii. Volumul mare de informaţii dobândite în acest domeniu şi studiul aprofundat al acestora au dat naştere unei specializări noi, cea de *inginer constructor*.

Arhitectul, plecând de la necesităţile omului, caută să-i creeze ambianţă şi volum optim pentru desfăşurarea activităţilor acestuia, rezolvând latura *funcţională* şi *estetică* a oricărei construcţii, iar inginerul constructor, prin cunoştinţele sale tehnice face ca materializarea concepţiei arhitecturale să se constituie într-o construcţie care să satisfacă cerinţa de *rezistenţă* (să nu se rupă) şi condiţia de *rigiditate* (să nu se deformeze peste anumite limite ce ar putea deveni periculoase). Pe lângă considerentele *arhitecturale* şi *inginereşti* construcţiile de orice fel trebuie gândite şi sub efect ECONOMIC privind *costul* şi materialele puse în operă.

Satisfacerea concomitentă a cerinţelor precizate mai sus impune un înalt profesionalism pentru arhitect şi inginerul constructor - soluţiile adoptate rezultând dintr-o strânsă colaborare şi muncă de echipă a celor doi specialişti.

Pentru dobândirea "limbajului comun" necesar acestei munci, pentru gândirea unei construcţii sub aspect structural şi pentru a putea rezolva singur o serie de probleme privind rezistenţa şi rigiditatea elementelor de construcţie, ARHITECTUL trebuie să posede un volum însemnat de cunoştinţe din domeniul disciplinelor tehnice inginereşti.

Opinia conform căreia concepţia unei structuri de rezistenţă poate fi rezultatul exclusiv al *intuiţiei* este depăşită.

Deşi se bazează pe cunoştinţe solide şi experienţă îndelungată, *intuiţia* poate fi înşelătoare, de aceea este bine să fie dublată de un *calcul matematic* bazat pe "traducerea" în relaţii şi formule de calcul a comportării structurii la acţiuni mecanice. Efectuarea acestuia nu este însă posibilă fără cunoaşterea elementelor lui de bază, a principiilor de modelare structurală a construcţiilor prin scheme de calcul care să reflecte cât mai fidel comportarea reală a elementului studiat şi a construcţiei în ansamblu. Atingerea profesionalismului necesar acestor abordări, în ordine didactică, începe cu însuşirea elementelor de bază ale Mecanicii Tehnice, Staticii Construcţiilor şi Rezistenţei Materialelor al căror conţinut reprezintă baza ştiinţei construcţiilor. Ele sunt continuate apoi cu disciplinele de Teoria Structurilor, Structuri Speciale, Reabilitarea Construcţiilor şi Terapeutica Construcţiilor ce fac parte din pregătirea academică a studentului arhitect.

Un vechi proverb chinezesc spunea: "*A învăţa fără a gândi este nefolositor; a gândi fără a învăţa este primejdios*". Învăţăturile rezultate din înţelepciunea acestuia sunt perfect valabile şi în zilele noastre şi, cu siguranţă, vor fi valabile în toate timpurile ce vor urma.

În domeniul tehnic, importanţa lor este hotărâtoare: învăţarea trebuie făcută cu înţelegerea fenomenelor studiate, cu logica fiecăruia dintre ele, mecanismul învăţării

contribuind la formarea unei gândiri profunde, atât de necesare în conceperea unei construcţii *sub aspect structural*.

Dowrich şi Key, referindu-se la acest aspect constată că: "*niciodată nu va putea un inginer constructor să realizeze o structură suficient de rezistentă la acţiuni mecanice (cutremure) pentru o clădire prost concepută (evident, sub aspect structural)*". Ideea că în zilele noastre programele de calcul şi calculatoarele permit inginerului structurist să asigure rezistenţa unei clădiri, indiferent de concepţia ei arhitecturală s-a dovedit a fi eronată, lucru confirmat în numeroase cazuri practice.

De altfel, referindu-se la acest aspect, Arnold şi Reitherman arătau că "*un aspect al proiectării, de importanţă egală sau chiar mai mare decât calculul structurii, este alegerea configuraţiei clădirii*". Opiniile în acest sens sunt numeroase şi dacă în citatele date se referă la acţiuni seismice, ele pot fi extinse la orice acţiune mecanică.

O clădire bine conformată în acest sens va prelua cu eficienţă toate încărcările la care este supusă şi se va realiza cu un efort material şi financiar mai redus.

Cartea de faţă selectează şi redă, într-o formă accesibilă, o tematică vastă care cuprinde forţele şi sistemele de forţe, echilibrul corpurilor şi sistemelor de corpuri, diagramele de eforturi la diverse tipuri de structuri, solicitările simple, solicitările compuse, flambajul şi solicitările dinamice.

Ea pune astfel la dispoziţia cititorului volumul de informaţii necesare în rezolvarea unui însemnat număr de probleme din tehnica construcţiilor, asigurându-i totodată nivelul de cunoştinţe necesare abordării celorlalte discipline şi lucrări de specialitate în domeniu, conţinut ce

formează *Bazele Mecanicii Structurilor* de rezistenţă la construcţiile de orice tip.

Dedicată studenţilor Facultăţii de Arhitectură, cartea poate fi utilă tuturor celor interesaţi în dobândirea sau reîmprospătarea cunoştinţelor de bază ale Mecanicii, Staticii Construcţiilor şi Rezistenţei Materialelor, cu aplicabilitate în alcătuirea şi calculul construcţiilor.

Autorul

CAPITOLUL 1

GENERALITĂŢI. NOŢIUNI ŞI PRINCIPII FUNDAMENTALE

1.1 OBIECTUL MECANICII. NOŢIUNI ŞI PRINCIPII FUNDAMENTALE

MECANICA TEORETICĂ este o parte a FIZICII care studiază legile obiective ale echilibrului şi mişcării corpurilor materiale.

Ea cuprinde 3 părţi distincte: Statica, Cinematica şi Dinamica. STATICA studiază repausul corpurilor şi condiţiile lor de repaus (echilibru). Obiectul CINEMATICII îl constituie mişcarea corpurilor fără a ţine seama de cauzele care o produc, iar DINAMICA studiază mişcările corpurilor (sistemelor materiale) luând în considerare cauzele care le determină.

Legile fundamentale ale mecanicii au fost enunţate de Isaac Newton, în anul 1687, sub forma a trei principii:

- principiul inerţiei:

Orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atâta timp cât asupra lui nu intervine o acţiune exterioară care să-i modifice această stare.

Prezenţa în natură a mai multor corpuri, în repaus şi în mişcare, în baza acestui principiu, conduce inevitabil la *interacţiuni reciproce* care modifică stările de repaus sau de mişcare ale corpurilor respective. Cauza acestor modificări poartă denumirea de forţă şi reprezintă o măsură a interacţiunii dintre corpuri.

- legea fundamentală a dinamicii:

Acceleraţia (variaţia stării de mişcare) unui corp este proporţională cu forţa aplicată acestuia şi este îndreptată în direcţia şi sensul forţei. Matematic această lege se exprimă prin relaţia:

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} \tag{1.1}$$

în care m reprezintă o constantă numită *masă*.

Newton mai observă că, dacă asupra unui corp acţionează două sau mai multe forţe, efectul lor este egal cu suma efectelor produse de fiecare forţă în parte (principiul independenţei acţiunii forţelor). Tot Newton arată că dacă asupra unui corp acţionează simultan două forţe, efectul lor este acelaşi cu cel al unei singure forţe având mărimea şi direcţia diagonalei paralelogramului ce are ca laturi cele două forţe (*principiul paralelogramului forţelor*, cunoscut şi sub denumirea de *corolarul I* al lui Newton).

• *principiul acţiunii şi reacţiunii*:
Oricărei acţiuni îi corespunde întotdeauna o reacţiune egală şi direct opusă.

În baza acestui principiu, acţiunile reciproce a două corpuri sunt totdeauna egale şi îndreptate în sens contrar. Principiul este valabil în mecanica clasică atât în cazul corpurilor aflate la distanţă cât şi a celor în contact.

Observaţie

Principiile enunţate mai sus sunt admise ca *postulate* ale mecanicii clasice, ele nu sunt deduse pe cale teoretică, dar se verifică practic în toate problemele în care intervine aplicarea lor.

1.2 FORŢE ŞI LEGĂTURI. SISTEME DE FORŢE. CLASIFICAREA FORŢELOR ŞI SISTEMELOR DE FORŢE

Interacţiunile dintre corpuri cuprind *acţiuni* şi *reacţiuni* egale în mărime şi direct opuse. În mecanică sunt studiate numai acţiunile ce au ca efect modificarea stării de repaus sau de mişcare, făcându-se abstracţie de schimbările în structura chimică sau starea fizică a corpurilor. Formal, aceste acţiuni se reprezintă prin *forţe* şi *legături*.

Atunci când o acţiune se manifestă cu intensitate, direcţie şi sens, ea se reprezintă printr-o forţă iar geometric printr-un segment orientat.

Rezultă deci că forţa este o mărime vectorială caracterizată prin modul, direcţie, sens şi punct de aplicaţie (vezi fig. 1.1.).

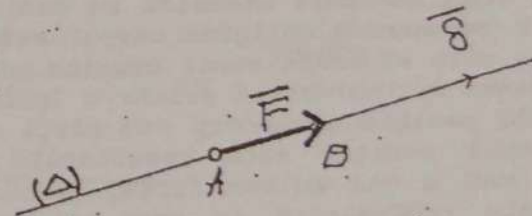


Fig. 1.1

Modulul reprezintă mărimea, în valoare absolută a segmentului AB; este întotdeauna pozitiv şi se notează cu:

$$F = |\bar{F}| = |\overline{AB}| \tag{1.2}$$

Direcţia (suportul forţei) este materializată prin dreapta (Δ) ce poate fi precizată în raport cu un sistem de referinţă şi orientată prin versorul ei $\bar{\delta}$.

Sensul forţei pe suportul (Δ) este precizat prin săgeată, de la A la B, punctul A purtând şi denumirea de *punct de aplicare a forţei*.

În raport de restricţiile impuse acestuia, forţele pot avea caracter de:

- *vectori liberi* atunci când punctul lor de aplicaţie poate ocupa orice poziţie în spaţiu.
- *vectori alunecători* când punctele de aplicaţie pot ocupa orice poziţie pe suportul Δ al acestora.
- *vectori legaţi* dacă punctul lor de aplicaţie are o poziţie unică (fixă) în spaţiu.

Referindu-ne la acţiunea forţelor asupra corpurilor, acestea au caracter de vectori legaţi (forţe legate) atunci când sunt aplicate unor corpuri cu dimensiuni neglijabile (puncte materiale) şi caracter de vectori alunecători dacă sunt aplicate corpurilor a căror dimensiuni nu pot fi neglijate.

Atunci când acţiunea mecanică se manifestă ca o restricţie geometrică obligând corpul sau anumite porţiuni ale sale să ocupe numai anumite poziţii în spaţiu, aceasta se reprezintă printr-o *legătură*.

Întrucât poziţia unui corp sau părţi din corp într-o anumită poziţie este rezultatul acţiunii unei forţe sau a mai multor forţe, rezultă că o legătură este echivalentă cu una sau mai multe forţe care supun corpul la aceleaşi restricţii. Această echivalenţă fundamentează aşa numita *axiomă a legăturilor* în baza căreia orice legătură aplicată unui corp poate fi înlocuită cu o forţă numită *reacţiune* sau *forţă de legătură*, având acelaşi efect asupra corpului ca şi legătura.

Rezumând cele arătate mai sus rezultă că forţele care acţionează asupra corpurilor pot fi clasificate în două mari categorii:

- *forţe active*, forţe direct aplicate sau forţe date, de regulă cunoscute ca modul, direcţie, sens şi punct de aplicaţie.
- *forţe pasive*, de legătură sau reacţiuni, ce corespund anumitor tipuri de legături ale corpului, de regulă necunoscute.

La rândul lor, forţele active şi cele pasive se clasifică pe baza următoarelor criterii:

A. *După mărimea suprafeţelor pe care se aplică* (fig. 1.2).

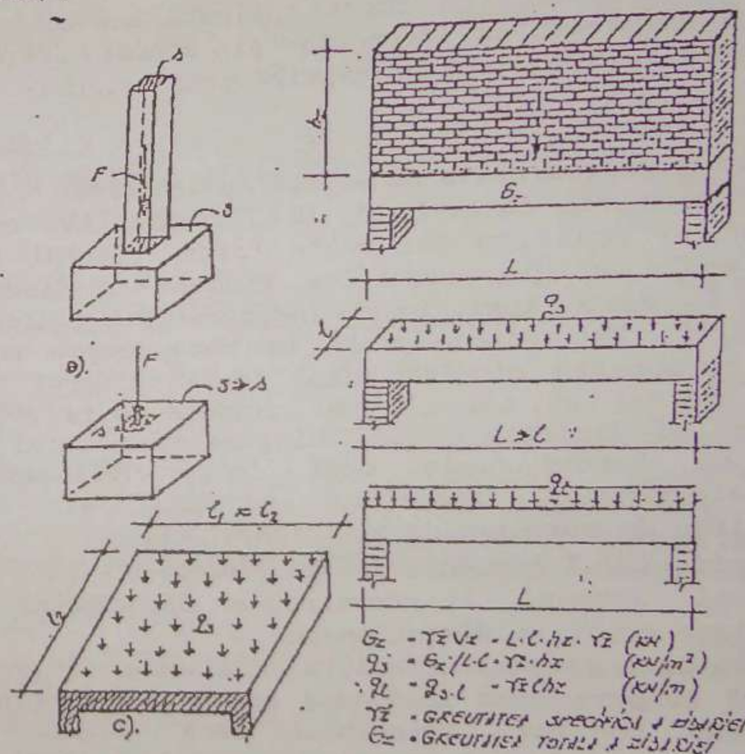


Fig. 1.2

- *Forţe concentrate*
- *Forţe distribuite*

Forţele concentrate reprezintă acţiuni care se exercită pe suprafeţe foarte mici, în raport cu dimensiunile corpului, teoretic acţiunea lor considerându-se punctuală (fig. 1.2,a).

Ele au dimensiunea [F] şi se măsoară în unităţi de forţă: N, daN, kN, kgf, tf etc.

Forțele distribuite sunt acțiuni care se exercită continuu pe porțiuni mai mari ale corpului sau pe întregul corp. Ele sunt caracterizate prin direcție, sens și intensitate (fig. 1.2,b).

În figura 1.2,a suprafața de interacțiune dintre stâlp și fundație este mult mai mică decât suprafața S a blocului de fundație; interacțiunea dintre ele se reprezintă printr-o forță concentrată F. Zidăria executată deasupra grinzii din figura 1.2,b acționează pe toată suprafața ei superioară, de arie $A=L\times\ell$, relativ mare.

Dacă aceasta are una din dimensiuni mică în raport cu cealaltă ($\ell<<L$) distribuția se consideră liniară de intensitate q_ℓ (fig. 1.2.b). Forțele distribuite liniar (q_ℓ) au dimensiunea de $[FL^{-1}]$ și se măsoară în unități de forță pe unități de lungime: N/cm, kN/m, daN/m etc. În domeniul construcțiilor, forțele continue pot avea distribuție uniformă (fig. 1.3,a), distribuție liniară (fig. 1.3,b), distribuție parabolică (fig. 1.3,c) etc.

Dacă suprafața acțiunii mecanice are dimensiuni comparabile (fig. 1.2,c), forțele care o reprezintă au dimensiunea $[FL^{-2}]$ și se măsoară în unități de forță pe unități de suprafață: N/mmp, daN/cmp, kN/mp etc. Legile de distribuție a forțelor pe suprafețe sunt aceleași cu cele ale distribuției liniare specificate în figura 1.3.

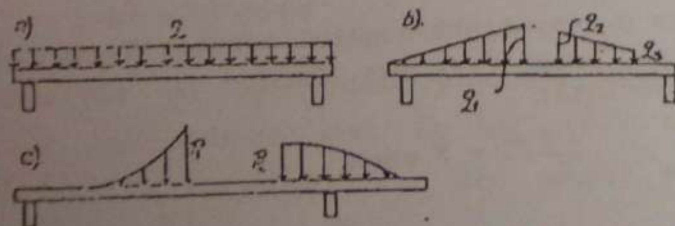


Fig. 1.3

B. *După variația intensității forțelor în timp* (fig. 1.4), acestea pot fi statice, ciclice și dinamice.

- *Forțele statice* sunt acelea al căror intensitate crește lent de la valoarea zero la valoarea maximă după care nu se mai modifică în timp (fig. 1.4,a).
- *Forțele ciclice* au intensitatea variabilă și repetabilă identic după perioade care se succed continuu (fig. 1.4,b).

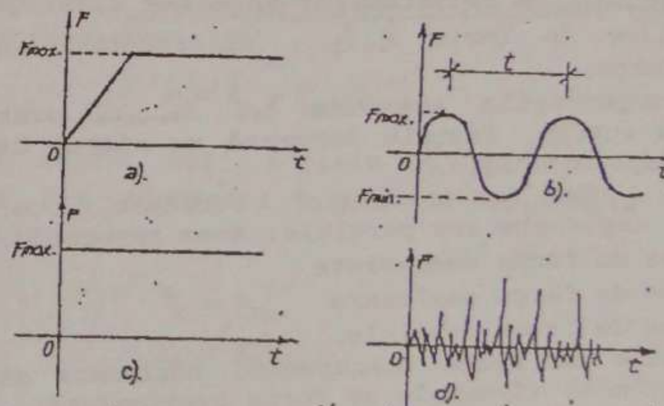


Fig. 1.4

- *Forțe dinamice* își modifică intensitatea în timp rapid (fig. 1.4,c și d) imprimând particulelor materiale accelerații care, în baza legii a doua a dinamicii ($F = m\cdot a$) dau naștere la forțe inerțiale.

C. *După durata și frecvența de acțiune.*

În domeniul construcțiilor forțele ce acționează asupra elementelor componente ale acestora poartă denumirea de ~~sarcini~~ sau ~~încărcări~~ și se clasifică în două grupe:

- Încărcări permanente (greutatea proprie, greutatea utilajelor fixe etc) a căror acțiune

este continuă pe toată durata de existență a construcției;

- Încărcări temporare a căror acțiune pe elementele de cosntrucție este discontinuă. La rândul lor, acestea pot fi:
  - de lungă durată (încărcările din depozite, mobilierul, zăpada etc);
  - de scurtă durată (acțiunea vântului, variațiile de temperatură, oameni în clădirile de locuit etc);
  - accidentale (cutremurele de pământ, exploziile, alunecările de teren etc).

D. <u>După poziția suporturilor forțelor</u>.

O mulțime de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ formează un *sistem de forțe*.

Dacă suporturile acestora $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sunt oarecare în spațiu, forțele formează un sistem de *forțe oarecare* în spațiu.

Atunci când suporturile forțelor sunt concurente, coplanare sau paralele, avem respectiv:

- *sisteme de forțe concurente*
- *sisteme de forțe coplanare*
- *sisteme de forțe paralele.*

Sistemele de forțe concurente, coplanare și paralele formează *sistemele de forțe particulare*.

Rezultă deci că sistemele de forțe se clasifică în două mari grupe:

- sisteme de forțe oarecare în spațiu.
- sisteme de forțe particulare.

Observație

Forțele fiind mărimi vectoriale, toate operațiile cu acestea se vor efectua în același mod și după aceleași reguli date de Matematică la secțiunea de Calcul vectorial.

1.3 PROIECȚIA UNEI FORȚE PE O AXĂ

Fie o dreaptă orientată (D) de versor $\bar{\delta}$ și o forță $\bar{F} = \overline{AB}$ având suportul Δ (fig. 1.5).

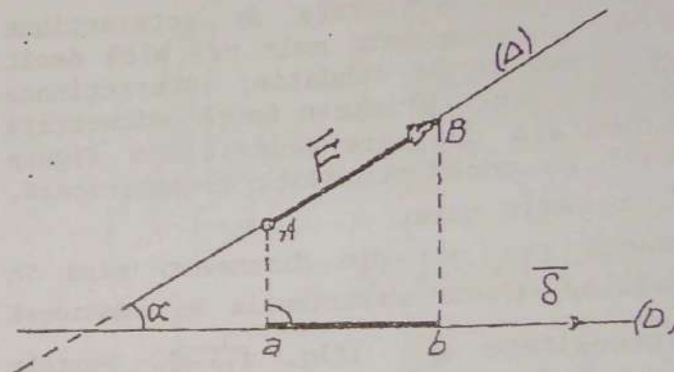


Fig. 1.5

Prin proiecție a forței $\bar{F}$ pe axa D, notată $p_r\bar{F}/D$ se înțelege modulul vectorului $\overline{ab}$ determinat de perpendicularele coborâte din extremitățile A și B ale forței pe axa D. Matematic aceasta se exprimă prin relația:

$$p_r\bar{F}/D = |\overline{ab}| = ab$$

Din considerente geometrice (fig. 1.5) rezultă:

$$ab = |\overline{AB}| \cos\alpha = |\bar{F}| \cos\alpha = F\cos\alpha$$

în care α reprezintă unghiul ascuțit format de suportul Δ al forței $\bar{F}$ cu axa (D).

În consecință:

$$p_r\bar{F}/D = F\cos\alpha \tag{1.3}$$

Ca produs între două mărimi scalare (F şi cosα) proiecţia unei forţe pe o axă este un scalar. Semnul acestuia este pozitiv dacă vectorul $\overline{ab}$ are sensul axei (D) şi negativ în caz contrar. Pentru ilustrare vom considera forţa $\bar{F}$ conţinută în planul yOz, de modul F, direcţie α şi sensul de la A la B (fig. 1.6.).

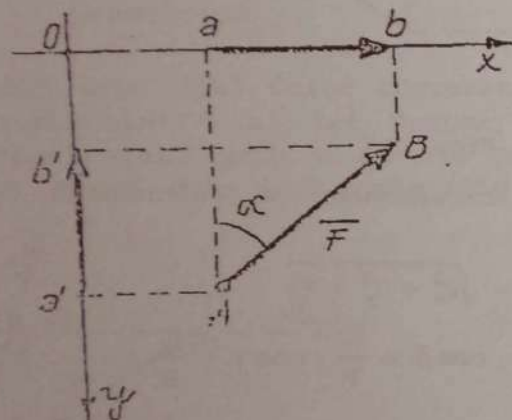


Fig. 1.6

În baza celor precizate mai sus, proiecţiile acesteia pe axele Ox şi Oy vor avea valorile:

$$p_r\bar{F}/x = |\overline{ab}| = F\cos(90-\alpha) = F\sin\alpha$$

$$p_r\bar{F}/y = |\overline{a'b'}| = -F\cos\alpha$$

De observat că $p_r\bar{F}/x$ este pozitivă deoarece vectorul $\overline{ab}$ are sensul axei Ox iar $p_r\bar{F}/y$ este negativă deoarece vectorul $\overline{a'b'}$ are sensul opus celui al axei Oy.

1.4 EXPRESIA ANALITICĂ A UNEI FORŢE

Fie un sistem cartezian plan de referinţă xOy şi o forţă oarecare $\bar{F}$ (fig. 1.7).

Conform regulii paralelogramului, forţa dată poate fi privită ca o sumă de două forţe $\overline{F_x}$ şi $\overline{F_y}$ ce determină paralelogramul cu diagonala $\bar{F}$.

Exprimată matematic, regula precizată conduce la ecuaţia vectorială:

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y \qquad (1.4)$$

La rândul lor, forţele $\overline{F_x}$ şi $\overline{F_y}$ aşa cum rezultă din figura 1.7 pot fi exprimate prin relaţiile:

$$\bar{F}_x = F_x\bar{i}$$
$$\bar{F}_y = F_y\bar{j} \qquad (1.5)$$

în care F_x şi F_y reprezintă proiecţiile forţelor $\overline{F_x}$ şi $\overline{F_y}$ pe axele sistemului de referinţă xOy.

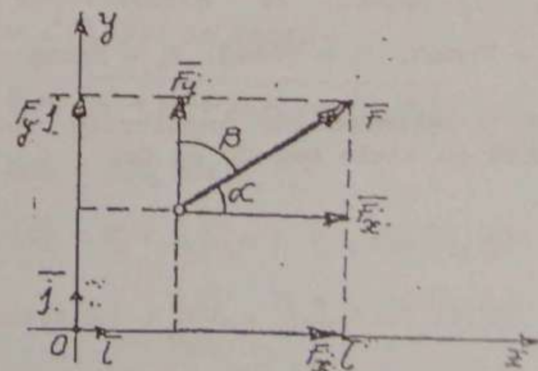


Fig. 1.7

Având în vedere relaţiile (1.4) şi (1.5), expresia analitică a forţei devine:

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} \tag{1.6}$$

Cunoscând expresia analitică a unei forţe se poate calcula cu uşurinţă modulul acesteia şi poziţia ei în raport cu axele de referinţă, dată de cosinuşii unghiurilor α şi β, numiţi *cosinuşi directori*. Astfel, din figura 1.7 rezultă:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \tag{1.7}$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

Pentru o forţă în spaţiu, raportată la un sistem cartezian de axe Oxyz, figura 1.8, expresia analitică stabilită cu totul similar are forma:

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z k \tag{1.8}$$

în care:

$$F_x = F\cos\alpha; \; F_y = F\cos\beta; \; F_z = F\cos\gamma$$

α, β şi γ reprezentând unghiurile făcute de direcţia forţei cu axele Ox, Oy şi Oz.

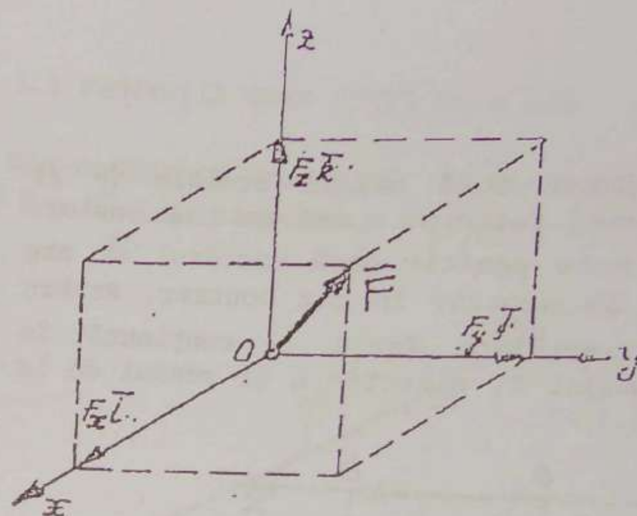


Fig. 1.8

Modulul şi direcţia rezultantei se calculează cu relaţiile:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \; \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \; \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \tag{1.8}$$

1.5 ADUNAREA (COMPUNEREA) FORŢELOR CONCURENTE

Suma a două sau mai multe forţe concurente $\bar{F}_i$ (i=2, 3,...,n) este o forţă rezultantă $\bar{R}$ aplicată în punctul lor de concurenţă, având acelaşi efect mecanic cu cel al forţelor $\bar{F}_i$ acţionând asupra aceluiaşi sistem material.

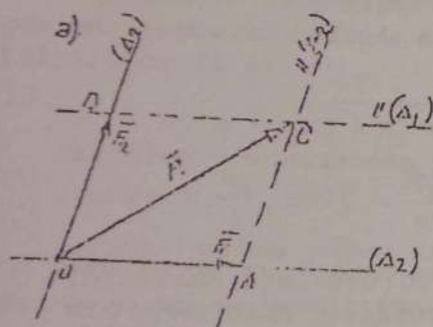
Vectorial, operaţia de adunare a forţelor se exprimă prin relaţia:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{R} \qquad (1.9)$$

Cunoscând vectorii $\bar{F}_i$, rezultanta lor $\bar{R}$ poate fi determinată geometric sau *analitic*.

1.5.1 Compunerea forțelor concurente - soluție geometrică

Fiind date două forțe concurente $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ în baza corolarului I al lui Newton, suma acestora este reprezentată prin diagonala paralelogramului având ca laturi cele două forțe (fig. 1.9.a).



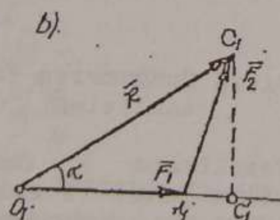


Fig. 1.9

Din considerente geometrice forța $\bar{F}_2 = \overline{OB}$ este egală cu vectorul $\overline{AC}$..

Rezultă deci că rezultanta $\bar{R}$ a forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ se poate obține unind originea 0 a forței $\bar{F}_1$ cu extremitatea C a vectorului $\overline{AC}$, de același modul, direcție și sens cu forța $\bar{F}_2$ dar având punctul de aplicație în extremitatea A a forței $\bar{F}_1$ (fig. 1.9.b).

Vectorii cu același modul, direcție și sens dar puncte de aplicație diferite poartă denumirea de *vectori echipolenți*.

Utilizând aceste mărimi, rezultanta forțelor concurente $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ se obține pe baza unei construcții simple (fig. 1.10.b) realizate în următoarea succesiune:

- se alege un pol arbitrar O1 în care se construiește vectorul $\overline{O_1A_1}$ echipolent forței $\bar{F}_1$.
- cu origine în A1 se construiește vectorul $\overline{A_1C_1}$ echipolent al forței $\bar{F}_2$.
- se unește polul O_1, origine a vectorului echipolent $\bar{F}_1 = \overline{O_1A_1}$ cu vârful C_1 al vectorului echipolent $\bar{F}_2 = \overline{A_1C_1}$

Rezultanta $\bar{R}$ a celor două forțe este reprezentată prin vectorul $\overline{O_1C_1}$.

Aplicat în această formă, corolarul I al lui Newton este cunoscut sub denumirea de *regula triunghiului*.

Modulul și direcția rezultantei exprimată prin unghiul dintre aceasta și una din forțe, (spre exemplu față de forța F_1) se obțin din considerente geometrice și trigonometrice în triunghiurile $O_1A_1C_1$ și $O_1C'_1C_1$ (fig. 1.9,b) aplicând teorema lui pitagora generalizată și respectiv exprimând unghiul $\alpha = \measuredangle(\bar{F}_1, \bar{R})$. Se obțin:

$$\bar{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)} \qquad (1.10)$$

$$A_1C_1' = A_1C_1\cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$$

$$O_1C_1' = F_1 + A_1C_1' = F_1 + F_2\cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{F}_1) = \frac{O_1C_1'}{O_1C_1} = \frac{F_1 + F_2\cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{R} \qquad (1.11)$$

Dacă forțele concurente formează un sistem de n forțe (fig. 1.10) rezultanta acestora se poate obține folosind succesiv regula triunghiului (fig. 1.10.b).

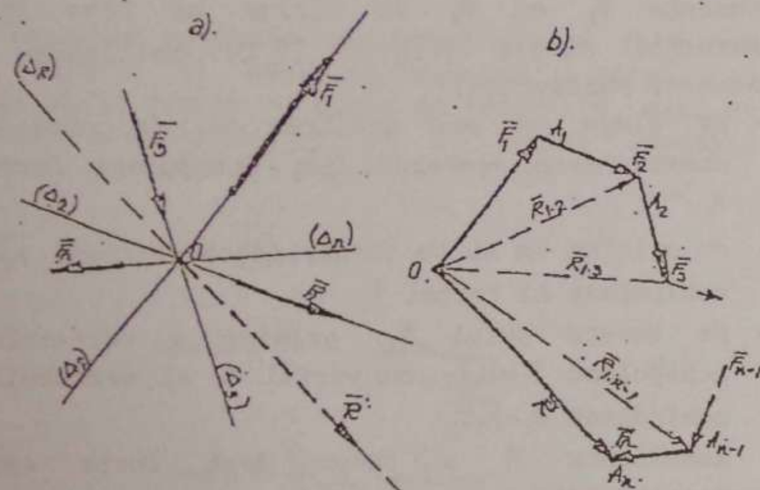


Fig. 1.10

Alegând polul arbitrar O_1 și aplicând-o primelor două forțe se obține rezultanta acestora $\bar{R}_{12}$. Se adună apoi forța $\bar{R}_{12}$ cu forța $\bar{F}_3$ după același procedeu și se obține rezultanta $\bar{R}_{1\text{-}3}$ ș.a.m.d.

Exprimând vectorial operațiile efectuate se obține:

$$\bar{R}_{1-2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$$\bar{R}_{1-3} = \bar{R}_{1-2} + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

$$\bar{R}_{1-n} = \bar{R}_{1,n-1} + \bar{F}_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{R}$$

În consecință, vectorul $\bar{R}_{1-n} = \overline{O_1A_n}$ având originea în O1 și vârful în extremitatea A_n a forței

echipolente $\bar{F}_n$ reprezintă chiar rezultanta $\bar{R}$ a sistemului de forțe concurente.

Linia poligonală $O_1, A_1, A_2, \ldots A_n$ (fig. 1.10,b) se numește *poligon al forțelor* $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$.

Determinarea rezultantei unui sistem de forțe revine deci la construirea poligonului acestora, motiv pentru care procedeul de lucru poartă și denumirea de *regula poligonului*.

Observație

Construcțiile geometrice din figurile 1.9.b și 1.10.b permit determinarea rezultantei unui sistem de forțe pe cale *grafică*. În acest scop se admite o scară a forțelor pe baza căreia se construiesc liniile poligonale O_1-A_1-C_1 respectiv O_1-A_1-A_2 ... A_n și se citesc modulele O_1A_n = R. Direcția vectorului $\bar{R} = \overline{O_1A_n}$ se obține măsurând unghiul format de acesta cu direcția unei forțe luate ca reper de referință.

1.5.2 Compunerea forțelor concurente - soluție analitică

Rezultanta a două sau mai multe forțe concurente poate fi obținută cu ușurință analitic, utilizând în acest scop expresiile analitice ale forțelor exprimate în raport de un sistem cartezian arbitrar de referință:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= F_{1x}\bar{i} + F_{1y}\bar{j} + F_{1z}\bar{k} \\ \bar{F}_2 &= F_{2x}\bar{i} + F_{2y}\bar{j} + F_{2z}\bar{k} \\ \bar{F}_n &= F_{nx}\bar{i} + F_{ny}\bar{j} + F_{nz}\bar{k} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1.12) se obține:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = (F_{1x}+F_{2x}+\dots+F_{nx})\bar{i} + (F_{1y}+F_{2y}+\dots+F_{ny})\bar{j} +$$
$$+ (F_{1z}+F_{2z}+\dots+F_{nz})\bar{k} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\bar{i} + \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\bar{j} + \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\bar{k} = \bar{R},$$

în care $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = R_x$, $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = R_y$, $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = R_z$ reprezintă sumele proiecțiilor tuturor forțelor pe axele Ox, Oy și respectiv Oz.

Cu notațiile de mai sus, expresia analitică a rezultantei devine:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} \quad (1.13)$$

Modulul și direcția acesteia (dată de cosinușii directori) se obține cu formule similare relațiilor (1.8):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R};\ \cos\beta = \frac{R_y}{R};\ \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \quad (1.14)$$

în care α, β și γ sunt unghiurile formate de axele Ox, Oy și Oz cu rezultanta $\bar{R}$ sau suportul acesteia.

Dacă forțele date sunt conținute într-un plan, spre exemplu în planul xOy, proiecțiile lor pe axa z sunt nule ($F_{iz}=0$) astfel că $R_z = \sum F_{iz} = 0$.

Înlocuind această valoare în ecuația (1.13) se obține expresia rezultantei forțelor concurente coplanare.

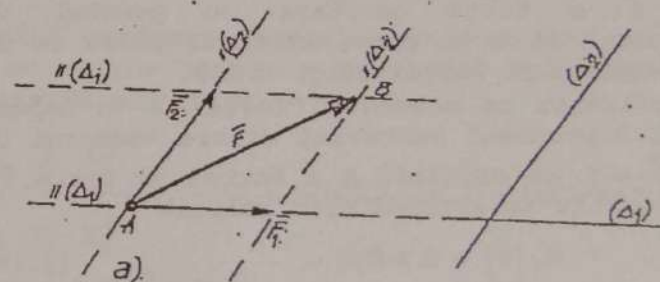
$$\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} \quad (1.13')$$

Modulul și direcția acesteia au expresiile evidente:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R};\ \cos\beta = \frac{R_y}{R} \quad (1.14')$$

1.6 DESCOMPUNEREA UNEI FORȚE

Descompunerea unei forțe după două direcții coplanare cu forța dată se face printr-o operație inversă compunerii (fig. 1.11).



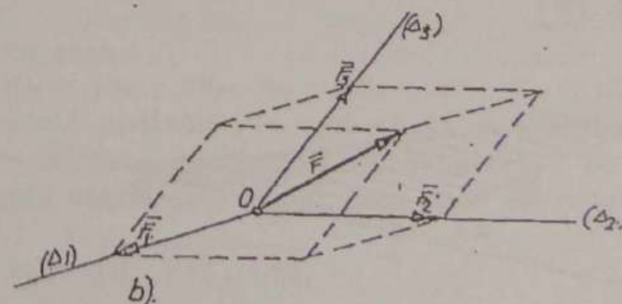


Fig. 1.11

Astfel, fiind dată forța $\bar{F}$ și direcțiile Δ_1 și Δ_2, concurente, ducând prin extremitățile A și B ale forței paralele la dreptele (Δ_1) și (Δ_2),

acestea determină forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ (fig. 1.11,a) care satisfac relația vectorială: $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$.

Descompunerea unei forțe după 3 direcții concurente necoplanare se face construind paralelipipedul având ca diagonală forța dată $\bar{F}$ iar ca muchii forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ (fig. 1.11.b). Forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ satisfac relația: $\bar{F} = \bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3$.

Descompunerea unei forțe după mai mult de 3 direcții necoplanare este o problemă nedeterminată.

1.7 MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Fie $\bar{F}$ o forță oarecare cu punctul de aplicație în A și *O* un punct arbitrar ales, ce nu aparține suportului forței (fig. 1.12).

Se definește ca *moment* al forței $\bar{F}$ în raport cu punctul *O* produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\overline{OA} = \bar{r}$ al originii A a forței și forța $\bar{F}$. Matematic acesta se exprimă prin relația:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} \qquad (1.15)$$

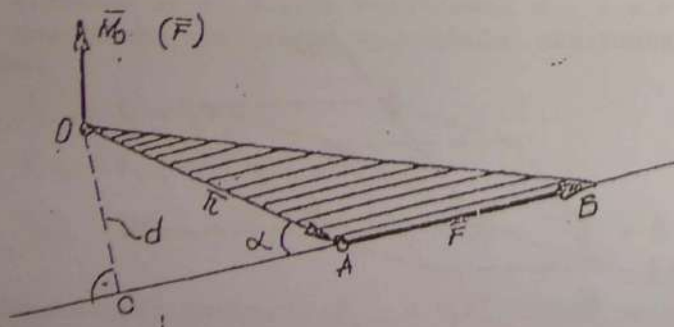


Fig. 1.12

Rezultând din produsul a doi vectori legați ($\bar{r}$ și $\bar{F}$) momentul forței în raport cu punctul O este un vector legat $\bar{M}_O(\bar{F})$, caracterizat prin modul, direcție, sens și punct de aplicație.

Modulul notat cu $M_O(\bar{F})$ se obține pe baza produsului vectorial dat de relația (1.15).

$$M_O(\bar{F}) = |\overline{OA}| \cdot |\bar{F}| \sin(\overline{OA}, \bar{F}) = F \cdot OA \cdot \sin\alpha$$

Notând cu *d* lungimea perpendicularei din *O* pe forță sau pe suportul forței se observă că OA × sinα = d, astfel că expresia mărimii momentului ia forma:

$$M_O(\bar{F}) = F \cdot d \qquad (1.16)$$

Distanța *d* poartă denumirea de *braț de pârghie* al forței F față de punctul *O*.

În concluzie, modulul vectorului moment în raport cu un pol *O* este egal cu produsul dintre modulul forței și brațul de pârghie al acesteia.

Direcția vectorului $\bar{M}_O$ este normală la planul determinat de vectorii $\bar{r}$ și $\bar{F}$.

Sensul este dat de înaintarea unui burghiu drept rotit în sensul de rotire al razei vectoare $\bar{r}$ când extremitatea ei parcurge forța $\bar{F}$ din punctul de aplicație A spre extremitatea opusă B.

Proprietăți:

- Momentul unei forțe în raport cu un punct de pe suportul său este nul (fig. 1.13,a). Proprietatea rezultă imediat din relația (1.16) observând că atunci când punctul O este situat pe suportul forței, brațul de pârghie al acesteia d = 0.
- Momentul unei forțe în raport cu un pol O nu se modifică atunci când forța $\bar{F}$ se deplasează pe suportul ei (1.13.b).

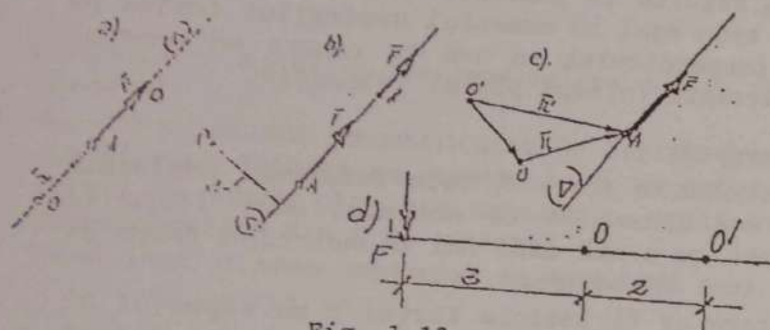


Fig. 1.13

Proprietatea rezultă tot din relația (1.16) observând că oricare ar fi poziția forței pe suportul ei brațul de pârghie d rămâne același (d = constant).

- Momentul forței $\bar{F}$ se schimbă odată cu schimbarea polului (fig. 1.13,c).

Într-adevăr, dacă $M_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$ este momentul forței $\bar{F}$ în raport cu polul O, momentul aceleiași forțe în raport cu un alt pol O′ va fi:

$$M_{O'}(\bar{F}) = \bar{r}' \times \bar{F} \qquad (1.17)$$

Observând că: $\bar{r}' = \bar{r} + \overline{O'O}$ relația (1.16) devine:

$$M_{O'}(\bar{F}) = \left(\bar{r} + \overline{O'O}\right) \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F} + \overline{O'O} \times \bar{F} = M_O(\bar{F}) + \overline{O'O} \times \bar{F} \qquad (1.18)$$

În baza relației (1.18) se deduce că momentul unei forțe $\bar{F}$ în raport cu un pol O′ este egal cu momentul forței calculat în vechiul pol O la care se adaugă momentul $\overline{O'O} \times \bar{F}$ al forței considerate aplicată în O în raport cu polul O′.

Pentru ilustrare vom considera forța F=10kN din figura 13,d și vom calcula succesiv momentele ei în raport de punctele O și O′.

$M_O(F) = 3F = 3 \times 10 = 30\text{kNm}$

$M'_O(F) = 5F = 5 \times 10 = 50\ \text{kNm}$

Se observă că $M'_O(F)$ satisface relația (1.18) respectiv:

$$M'_O(F) = \bar{M}_O(F) + O'O \cdot F = 30 + 2 \times 10 = 50\text{kNm}$$

Notând cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ versorii unui triedru cartezian drept, cu x, y, z coordonatele punctului de aplicație al forței A și cu F_x, F_y și F_z proiecțiile forței $\bar{F}$ pe axe, expresiile analitice ale vectorilor $\bar{r}$ și $\bar{F}$ devin:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \ ; \ \bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k} \qquad (1.19)$$

Făcând produsul vectorial indicat în relația (1.15) se obține expresia analitică a momentului unei forțe în raport cu un punct:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} - (xF_z - zF_x)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k} =$$

$$= M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} \qquad (1.20)$$

în care:

$M_{Ox} = yF_z - zF_y$; $M_{Oy} = zF_x - xF_z$; $M_{Oz} = xF_y - yF_x$ reprezintă proiecțiile vectorului $\bar{M}_O(\bar{F})$ pe axele de coordonate ale sistemului de referință. Modulul și direcția vectorului $\bar{M}_O(\bar{F})$ sunt date de relațiile:

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{M_{Ox}}{M_O} ; \cos\beta = \frac{M_{Oy}}{M_O} ; \cos\gamma = \frac{M_{Oz}}{M_O}$$

în care α, β și γ sunt unghiurile formate de vectorul $\bar{M}_O$ cu axele Ox, Oy și Oz.

1.8 MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Să considerăm acum o forță oarecare în spațiu $\bar{F}$ acționând pe suportul (D) și o axă arbitrară Δ.

Notând cu O punctul de intersecție al axei Δ cu un plan π normal pe aceasta și cu P cel de intersecție dintre același plan și suportul D se obține construcția din figura 1.14.

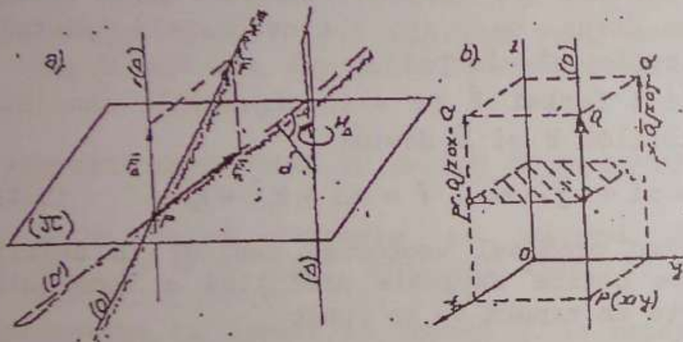


Fig. 1.14

Deplasând forța F cu originea în punctul P și descompunând-o după direcția Δ și după o direcție D' din planul π se obțin componentele acesteia F_Δ și F_π. Se observă cu ușurință că forța F_Δ, fiind perpendiculară pe planul π nu are tendința de a produce rotiri în acest plan, în consecință momentul ei în raport cu orice punct din planul π este nul.

La rândul ei, forța F_π fiind conținută în planul π are tendința de a roti în raport cu orice punct al acestuia care nu se găsește pe suportul ei. Fie O un punct curent al planului și d lungimea perpendicularei coborâte din acesta pe forța F_π sau pe suportul ei.

Produsul $F_\pi \cdot d$ este un moment care având tendința de rotire în jurul axei Δ, poartă denumirea de moment al forței în raport cu axa Δ.

Ținând seama de semnificațiile punctului O și ale forței F_π rezultă că *momentul unei forțe în raport cu o axă* este egal cu momentul proiecției forței pe un plan perpendicular pe axă în raport cu punctul în care aceasta înțeapă planul respectiv.

Proprietăți:

- Observând că forța F_Δ este totdeauna coplanară cu axa Δ rezultă că momentul unei forțe în raport cu o axă este nul atunci când forța și axa sunt coplanare.
- Oricare ar fi poziția forței F pe suportul D, proiecția ei pe planul π nu-și modifică modulul F_π și nici direcția D'. În aceste condiții brațul de pârghie d al forței F_π nu se modifică astfel că produsul $d \cdot F_\pi = M_\Delta$ rămâne constant. Rezultă deci că momentul unei forțe nu se modifică atunci când aceasta își modifică punctul de aplicație pe suportul ei.
- Considerând că planul π suferă o translație în lungul axei Δ, punctul în care aceasta îl va înțepa suferă și el o translație în poziția O'. Oricare ar fi această poziție, modulul proiecției forței F pe planul π și direcția acesteia în același plan D', rămân neschimbate, ajungându-se la situația prezentată la proprietatea 2 de mai sus.

Rezultă deci că momentul unei forțe în raport cu o axă este același în orice punct al axei respective.

Ca exercițiu, vom exprima în continuare momentele forței Q perpendiculare pe planul xOy în raport cu axele Ox, Oy și Oz (fig. 1.14,b) ale unui sistem cartezian de referință.

Suportul D al forței P(x,y) înțeapă planul xOy în punctul P(x,y). Vom avea:

- $M_{Ox} = Q \cdot y$ (planul perpendicular pe axa Ox este zOy, înțepat de aceasta în originea O. Proiecția forței în planul menționat are

ordonata y egală cu perpendiculara din O pe aceasta).

- $M_{Oy} = Q \cdot x$ (planul perpendicular pe axa Oy este zOx şi este înţepat de aceasta în O. Proiecţia forţei în acest plan are abscisa x, egală cu perpendiculara din O pe aceasta).
- $M_{Oz}=0$ (axa Oz este coplanară cu forţa Q).

1.9 TEOREMA MOMENTELOR SAU TEOREMA LUI VARIGNON

Fie un sistem de forţe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ concurente într-un punct O_1 şi $\bar{r}$ vectorul de poziţie al acestuia în raport de un pol arbitrar O (fig. 1.15.).

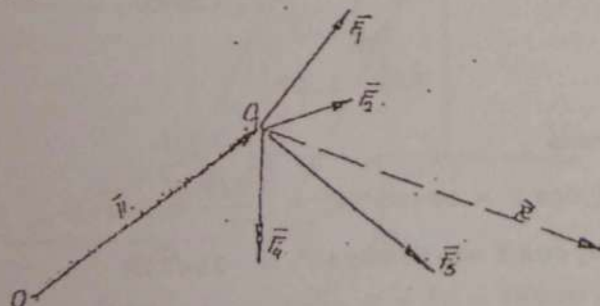


Fig. 1.15

Adunând vectorial forţele sistemului se obţine rezultanta acestora $\bar{R}$.

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{R}$$

Înmulţind vectorial stânga această relaţie cu $\bar{r}$ se obţine:

$$\bar{r}\times\bar{F}_1 + \bar{r}\times\bar{F}_2 + \dots + \bar{r}\times\bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}\times\bar{F}_i = \bar{r}\times\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{r}\times\bar{R} \text{ sau:}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \dots + \bar{M}_O(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \bar{M}_O(\bar{R}) \quad (1.23)$$

Relaţia (1.23) exprimă matematic *teorema momentelor* sau *teorema lui Varignon* care se enunţă astfel:

Suma momentelor forţelor concurente în raport cu un punct oarecare este egală cu momentul rezultantei sistemului de forţe respectiv în raport cu acelaşi punct.

Observaţie

Teorema lui Varignon demonstrată mai sus pentru un sistem de forţe concurente este valabilă pentru toate sistemele de forţe particulare, deci şi pentru forţele coplanare şi paralele.

1.10 CUPLU DE FORŢE. MOMENTUL UNUI CUPLU

Două forţe, egale în modul (mărime), paralele, de sensuri contrare şi având suporturi diferite, formează un cuplu de forţe (fig. 1.16).

Distanţa d dintre dreptele Δ_1 şi Δ_2 se numeşte braţul cuplului, iar planul (π) ce conţine aceste suporturi, plan de acţiune a cuplului.

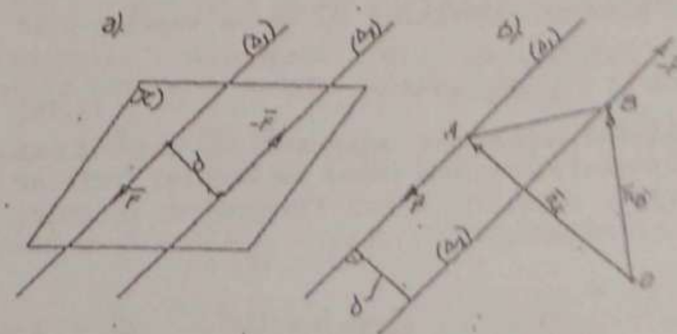


Fig. 1.16

Proprietăţi:

1. Suma proiecţiilor forţelor ce alcătuiesc orice cuplu, pe o axă oarecare este nulă.

2. Suma momentelor forţelor ce alcătuiesc orice cuplu în raport cu un punct oarecare este un vector liber, constant în mărime, direcţie şi sens, numit moment al cuplului (M_C). Pentru demonstrarea proprietăţii vom considera un cuplu arbitrar $\bar{F}$, $-\bar{F}$ şi un punct arbitrar O (fig. 1.16.a). Notând cu $\bar{r}_A$ şi $\bar{r}_B$ vectorii de poziţie a punctelor de aplicaţie ale forţelor $\bar{F}$ şi $-\bar{F}$ vom avea:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_C = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times (-\bar{F}) = (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F}$$

Dar, aşa cum rezultă din figura 1.16.b, $\bar{r}_A = \bar{r}_B + \overline{BA}$, din care $\bar{r}_A - \bar{r}_B = \overline{BA}$. Înlocuind această diferenţă în expresia momentului M_C de mai sus se obţine:

$$\boxed{\bar{M}_C = \overline{BA} \times \bar{F}} \qquad (1.24)$$

Momentul cuplului $\bar{M}_C$ are direcţia perpendiculară pe planul (π) al cuplului şi modulul (mărimea)

$$M_C = F \cdot BA \sin\left(\overline{BA}, \bar{F}\right)$$

Observând că $BA \cdot \sin\left(\overline{BA}, \bar{F}\right) = d$ reprezintă braţul cuplului, modulul momentului $\bar{M}_C$ se va exprima prin relaţia:

$$M_C = F \cdot d \qquad (1.25)$$

Analizând structura acesteia se observă că momentul cuplului depinde numai de modulul forţelor şi de braţul cuplului, fiind independent de polul unde se calculează.

1.11 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 1.11.1

Să se determine proiecţiile forţelor date în figura 1.17 pe axele Ox şi Oz.

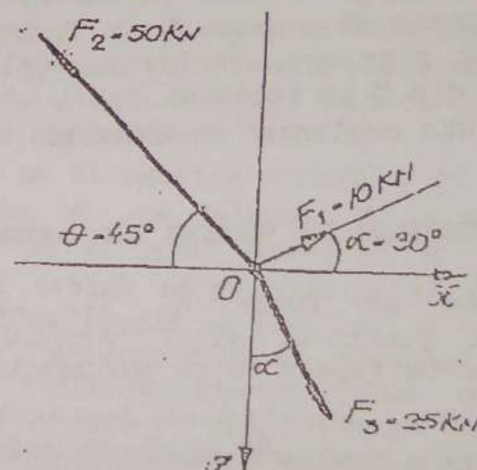


Fig. 1.17

Rezolvare

$$p_r\bar{F}_1 / O_x = F_1 \cos\alpha = 10\cos 30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,kN$$

$$p_r\bar{F}_2 / O_x = -F_2 \cos\theta = -50\cos 45^\circ = -25\sqrt{2}\,kN$$

$$p_r\bar{F}_3 / O_x = F_3 \cos(90-\alpha) = F_3 \sin\alpha = 25\sin 30^\circ = 12,5\,kN$$

$$p_r\bar{F}_1 / O_z = -F_1 \cos(90-30) = -F_1 \sin 30^\circ = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5\,kN$$

$$p_r\bar{F}_2 / O_z = -F_2 \cos(90-45) = -F_2 \sin 45^\circ = -50\frac{\sqrt{2}}{2} = -25\sqrt{2}\,kN$$

$$p_r\bar{F}_3 / O_z = F_3 \cos\alpha = 25\cos 30^\circ = 25\frac{\sqrt{3}}{2} = 12,5\sqrt{3}\,kN$$

Exemplul 1.11.2

Un sistem de forţe $\bar{F}_1 = 20$ kN, $\bar{F}_2 = 30$ kN şi $\bar{F}_3 = 50$kN acţionează după elementele unei prisme dreptunghiulare de laturi bxBxh = 3X4X3 (fig. 1.16).

Se cere:

a) Proiecţia forţelor pe axele sistemului de referinţă Oxyz. b) Expresia analitică a rezultantei sistemului de forţe, modulul şi direcţia acesteia.

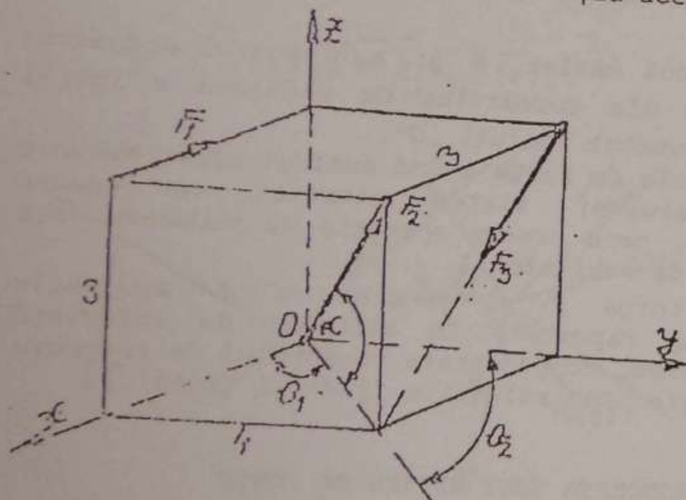


Fig. 1.18

Rezolvare

a) Folosind relaţia (1.3) se obţin:

$p_r\bar{F}_1 / O_x = F_{1x} = F_1 \cos 0 = -20\text{kN}$

$p_r\bar{F}_2 / O_x = F_{2x} = F_2 \cos\alpha \cdot \cos\theta_1 = 30 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{5} = 15,435\text{kN}$

$p_r\bar{F}_3 / O_x = F_{3x} = F_3 \cos 45^\circ = 35,355\text{kN}$

$p_r\bar{F}_1 / O_y = 0\ (\bar{F}_1 \perp$ planul Oyz)

$p_r\bar{F}_2 / O_y = F_{2y} = F_2 \cos\alpha \cdot \cos\theta_2 = 30 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{4}{5} = 21,910\text{ kN}$

$p_r\bar{F}_3 / O_y = 0\ (O_y \perp$ planul Oxz)

$p_r\bar{F}_1 / O_z = F_{1z} = 0\ (\bar{F}_1 \perp$ planul Oyz)

$p_r\bar{F}_2 / O_z = F_{2z} = F_2 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{30 \times 5}{\sqrt{34}} = 15,435\text{ kN}$

$p_r\bar{F}_3 / O_z' = F_{3z} = -F_3 \cos 45^\circ = -35,355\text{kN}$

b) Utilizând relaţia (1.17)

$$R_x = \sum_1^3 F_{ix} = -20 + 15,435 + 35,355 = 30,790\text{kN}$$

$$R_y = \sum_1^3 F_{iy} = 0 + 21,910 + 0 = 21,910\text{kN}$$

$$R_z = \sum_1^3 F_{iz} = 0 + 15,435 - 35,355 = -20,920\text{kN}$$

Expresia analitică a rezultantei:

$$\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} = 30,790\bar{i} + 21,910\bar{j} - 20,920\bar{k}$$

Modulul rezultantei:

$$|\bar{R}| = R = \sqrt{30,79^2 + 21,91^2 + (-20,92)^2} = 43,194\text{kN}$$

Cosinuşii directori ai rezultantei şi unghiurile făcute de acesta cu axele Ox, Oy şi Oz:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{30,79}{43,194} = 0,712\ ;\ \alpha = 44^\circ 32'$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{21,91}{43,194} = 0,507\ ;\ \beta = 59^\circ 31'$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{-20,92}{43,194} = 0,484\ ;\ \gamma = 61^\circ 2'$$

CAPITOLUL 2

REDUCEREA FORȚELOR ȘI A SISTEMELOR DE FORȚE

2.1 REDUCEREA UNEI FORȚE ÎNTR-UN PUNCT OARECARE

Fie un sistem material oarecare reprezentat prin corpul C și un punct A al acestuia în care acționează o forță $\bar{F}$ pe suportul Δ (fig.2.1,a).

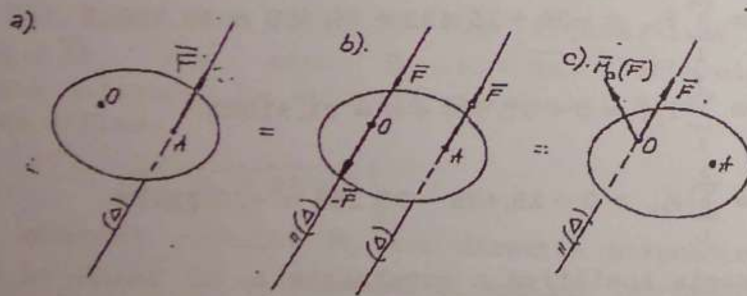


Fig. 2.1

Prin reducere a forței $\bar{F}$ în punctul arbitrar O se înțelege determinarea celui mai simplu sistem de mărimi mecanice care aplicate în O să aibă asupra corpului același efect cu cel al forței $\bar{F}$ aplicate în A.

Pentru găsirea acestuia vom duce prin punctul „O" dreapta $\Delta' \parallel \Delta$ și vom construi în acest punct perechile de forțe $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ (fig. 2.1,b). Efectul celor 3 forțe asupra corpului C este identic cu cel al forței $\bar{F}$ aplicate în A deoarece forțele $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ aplicate în O se anulează reciproc. Dar forța $\bar{F}$ aplicată în A și forța $-\bar{F}$ aplicată în O formează un cuplu de moment $\overline{M_0}(\bar{F})$.

Înlocuind în O efectul acestora prin momentul menționat, se obțin mărimile mecanice $\bar{F}$ și $\overline{M_0}(\bar{F})$ aplicate în „O" (fig. 2.c) care au asupra corpului același efect mecanic cu cel al forței $\bar{F}$ aplicate în A (fig. 2.1.a).

În concluzie, o forță $\bar{F}$ se reduce într-un punct arbitrar „O" la o forță egală în modul, direcție și sens cu forța dată și la un cuplu $\overline{M_0}(\bar{F})$ reprezentând momentul forței în raport cu punctul „O".

Cele două mărimi, $\bar{F}$ și $\overline{M_0}(\bar{F})$ poartă denumirea de elemente ale torsorului de reducere a forței date $\bar{F}$ în punctul (polul) „O".

Sistemele de forțe având același efect mecanic asupra aceluiași sistem material se numesc echivalente, prin urmare operația de reducere este o operație de echivalență.

Dacă forța $\bar{F}$ și punctul ei de aplicație A(x,y) sunt raportate în sistemul de referință cartezian Oxyz, componentele torsorului de reducere sunt definite prin relațiile (1.8) și (1.20).

2.2 REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE

Să considerăm acum un sistem de forțe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$, având punctele de aplicație A_1, A_2, ..., A_n acționând pe suporturile Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n și un pol arbitrar de reducere „O" (fig. 2.2,a).

Reducând forță cu forță, în polul considerat se va obține:

- un sistem de forțe concurente $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$ (fig.2.2.b) având rezultanta

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \qquad (2.1)$$

- un sistem de vectori moment $\overline{M_{oi}}\left(\overline{F_i}\right) = \overline{r_i} \times \overline{F_i}$ concurenți în același pol O, a cărui rezultantă este vectorul moment rezultant

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_o\left(\overline{F_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i} \qquad (2.2)$$

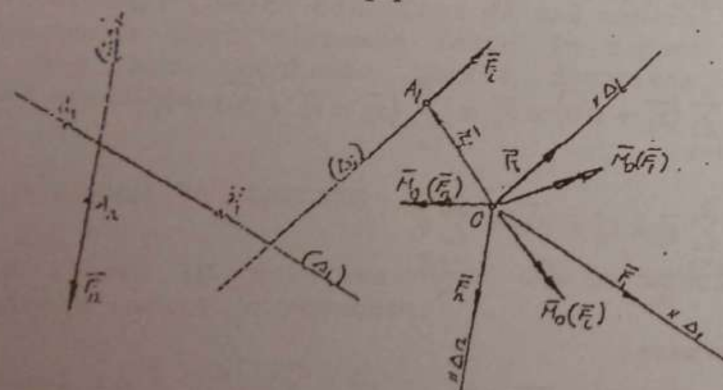


Fig. 2.2

Vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}_o$ definiți prin relațiile (2.1) și (2.2) formează elementele torsorului de reducere a sistemului de forțe în raport cu polul „O". Rezultă deci că un sistem oarecare de forțe se reduce în raport cu un punct arbitrar ales „O" la o rezultantă $\bar{R}$ și la un moment $\bar{M}_o$.

Dacă forțele $\bar{F}_i$ și punctele lor de aplicație $A_i(x_i, y_i, z_i)$, i = 1, 2, ..., n, sunt raportate în sistemul cartezian de referință Oxyz, rezultanta $\bar{R}$ și momentul $\bar{M}_o$ au expresiile:

$$\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} \qquad (2.3)$$

$$\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_iF_{iz} - z_iF_{iy}\right)\bar{i} + \sum_{i=1}^{n} \left(z_iF_{ix} - x_iF_{iz}\right)\bar{j} + \sum_{i=1}^{n} \left(x_iF_{iy} - y_iF_{ix}\right)\bar{k} = M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} \qquad (2.4)$$

în care $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$, reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor pe axele Ox, Oy și respectiv Oz, iar

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_iF_{iz} - z_iF_{iy}\right); \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \left(z_iF_{ix} - x_iF_{iz}\right);$$

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_iF_{iy} - y_iF_{ix}\right),$$

proiecțiile pe aceleași axe ale vectorului moment $\bar{M}_o$.

Având expresiile analitice ale rezultantei $\bar{R}$ și a momentului $\bar{M}_o$, modulele acestora și direcțiile lor se calculează cu relațiile:

$$R = \left|\bar{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (2.5)$$

$$M_O = \left|\bar{M}_o\right| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} \qquad (2.6)$$

$$\cos(\bar{R}, Ox) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\overline{M_O}, Ox) = \frac{M_{Ox}}{M}$$

$$\cos(\bar{R}, Oy) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\overline{M_O}, Oy) = \frac{M_{Oy}}{M} \qquad (2.7)$$

$$\cos(\bar{R}, Oz) = \frac{R_z}{R}; \quad \cos(\overline{M_O}, Oz) = \frac{M_{Ox}}{M}$$

2.3 PROPRIETĂȚILE ELEMENTELOR TORSORULUI DE REDUCERE

Așa cum rezultă din paragraful precedent, prin reducerea unui sistem de forțe într-un punct arbitrar ales „O" în cel mai general caz se obține o rezultantă $\bar{R}$ și un moment rezultant $\overline{M_o}$, date de relațiile (2.1) și (2.2), formând elementele torsorului de reducere.

Oricare ar fi sistemul forțelor reduse, vectorii $\bar{R}$ și $\overline{M_o}$ se bucură de următoarele proprietăți:

1) *Rezultanta* $\bar{R}$ nu se modifică cu schimbarea polului de reducere (R = const.). Ea se obține cu ajutorul poligonului forțelor care este o construcție independentă de pol.

Urmare a acestei proprietăți, rezultanta $\bar{R}$ poartă denumirea de *invariant vectorial* al reducerii sistemului de forțe.

2) *Momentul rezultant* $\overline{M_o}$ se modifică odată cu schimbarea polului de reducere.

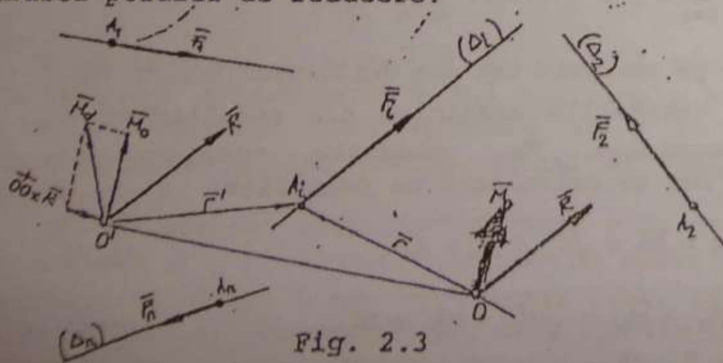


Fig. 2.3

Pentru a demonstra acest lucru vom considera sistemul de forțe oarecare $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ (fig. 2.3) al cărui moment, calculat în polul arbitrar O, este dat de relația:

$$\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i}$$

Schimbând polul de reducere în O', momentul aceluiași sistem de forțe, în raport cu noul pol, va fi:

$$\overline{M_{O'}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i'} \times \overline{F_i},$$

Observând că $\overline{r'} = \overline{r_i} + \overline{O'O}$, expresia momentului $\overline{M_{O'}}$ devine:

$$\overline{M_{O'}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r_i} + \overline{O'O}\right) \times \overline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r_i} \times \overline{F_i} + \overline{O'O} \times \overline{F_i}\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i}}_{\overline{M_O}} + \overline{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}}_{\bar{R}}$$

Prin urmare,

$$\overline{M_{O'}} = \overline{M_O} + \overline{O'O} \times \bar{R} \tag{2.8}$$

Relația (2.8) exprimă legea de variație a momentului rezultant al unui sistem de forțe cu modificarea polului de reducere, care se enunță astfel:

Momentul rezultant al unui sistem de forțe într-un nou pol O' este egal cu momentul rezultant calculat în vechiul pol O la care se adaugă

momentul $\overline{O'O} \times \bar{R}$ al rezultantei aplicate în O în raport cu polul O'.

În baza proprietăților de mai sus, elementele torsorului de reducere a unui sistem de forțe diferă de la un pol de reducere la altul, numai prin componenta moment $\bar{M}_o$.

Când aceasta este minimă, torsorul corespunzător $(\bar{R}, \bar{M}_{min})$ se numește *torsor minimal*.

Locul geometric al punctelor în raport cu care un sistem de forțe $\overline{F_i}(i = 1, 2, \dots, n)$ se reduce la torsorul minimal poartă denumirea de *axă centrală*.

Reducerea unui sistemde forțe în raport cu puncte ale axei centrale poartă denumirea de *reducere canonică*.

2.4 CAZURI DE REDUCERE

În raport de valorile $\bar{R}$ și $\bar{M}_o$ se disting următoarele cazuri de reducere:

Cazul I: $\bar{R} \neq 0$; $\overline{M_o} \neq 0$.

Forțele ce conduc la un astfel de torsor sunt reprezentate prin *sisteme oarecare* ce se reduc într-un pol arbitrar „O" la vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}_o$ a căror direcții fac între ele un unghi α.

Sistemul admite axă centrală în raport cu punctele căreia vectorii $\bar{R}$ și $\overline{M_o}$ sunt coliniari (torsorul minimal).

Efectul mecanic al acestuia este o translație pe direcția și în sensul forței $\bar{R}$ și o rotație în jurul suportului comun, motiv pentru care acest torsor poartă denumirea de *șurub, răsucitor sau dinam*.

Cazul II: $\bar{R} \neq 0$; $\overline{M_o} = 0$.

Sistemele de forțe având acest torsor se reduc într-un pol arbitrar O la un moment. $\overline{M_o}$ perpendicular pe rezultanta $\bar{R}$, $(\overline{M_o} \perp \bar{R})$ sau la un moment nul $\cdot (M_o = 0)$.

În raport cu puncte ale axei centrale un astfel de sistem se reduce la o forță rezultantă unică $\bar{R}$, coliniară cu axa respectivă.

Cazul III: $\bar{R} = 0$; $\overline{M_o} \neq 0$.

Sistemul de forțe este reprezentat printr-un cuplu ce se reduce la un moment invariant liber (același în orice punct din spațiu).

Cazul IV: $\bar{R} = 0$; $\overline{M_o} = 0$.

Sistemele de forțe ce dau naștere acestui torsor poartă denumirea de sisteme de *forțe în echilibru, nule sau echivalente cu zero.* Acest caz prezintă un interes special în domeniul construcțiilor, caracterizând starea de echilibru (repaus) a corpurilor, specifică tuturor elementelor de construcție.

Având în vedere expresiile vectorilor $\bar{R}$ și $\overline{M_o}$, date de relațiile (2.3) și (2.4) condiția de echilibru a sistemului de forțe se va exprima prin relațiile:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum F_{ix} = 0 \; ; \; M_{ox} = \sum \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) = 0, \\
R_y &= \sum F_{iy} = 0 \; ; \; M_{oy} = \sum \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right) = 0, \qquad (2.9) \\
R_z &= \sum F_{iz} = 0 \; ; \; M_{oz} = \sum \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Rezultă deci că echilibrul unui sistem de forțe în spațiu se exprimă prin șase ecuații scalare (ecuațiile 2.9).

2.5 REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE PARTICULARE

Sistemele de forțe concurente, coplanare și paralele formează sistemele de forțe particulare.

Privitor la operația de reducere, acestea prezintă următoarele proprietăți:

a) În raport cu un punct arbitrar din spațiu „O", vectorul rezultant $\bar{R}$ și momentul rezultant $\overline{M_0}$ sunt perpendiculari ($\bar{R} \perp \overline{M_0}$).

b) Admit valabilitatea teoremei lui Varignon.

c) În raport cu orice punct O al axei centrale $M_0 = M_{min} = 0$, sistemul de forțe reducându-se la o rezultantă unică $\bar{R}$ plasată după axa centrală.

2.5.1 Reducerea sistemelor de forțe concurente

Un sistem de forțe $\overline{F_i}$ (i = 1, 2, ... , n) ale căror suporturi Δ_i (i = 1, 2,... , n) concură într-un punct „O", formează un sistem de forțe concurente.

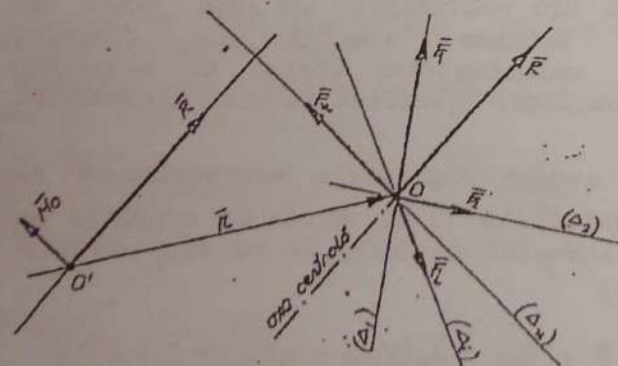


Fig. 2.4

Dacă polul de reducere este punctul de intersecție „O", momentul rezultant $\overline{M_0}$ este zero, iar torsorul de reducere a sistemului este format din forța rezultantă $\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$. Suportul rezultantei trecând prin polul „O", reprezintă axa centrală a sistemului de forțe. În raport cu punctele acesteia, forțele sistemului se reduc la o rezultantă unică $\bar{R}$ (fig. 2.4).

Dacă polul de reducere O' nu aparține axei centrale, prin reducerea sistemului de forțe se obține un torsor $\bar{R}$, $\overline{M_{O'}}$ cu elementele perpendiculare, în care $\overline{M_{O'}} = \bar{r} \times \sum \overline{F_i} = \bar{r} \times \bar{R}$.

Rezultanta $\bar{R}$ a sistemului de forțe poate fi determinată geometric (grafic) și analitic conform celor expuse la punctele (1.5.1) și (1.5.2).

La reducerea canonică sistemelor de forțe concurente, se disting următoarele două cazuri:

a) $\bar{R} \neq 0$. Sistemul de forțe concurente este echivalent cu o rezultantă unică acționând de-a lungul axei centrale care trece prin punctul de concurență al forțelor. În acest caz poligonul forțelor este deschis, rezultanta fiind vectorul obținut unind originea primei forțe cu extremitatea ultimei forțe (fig. 2.5).

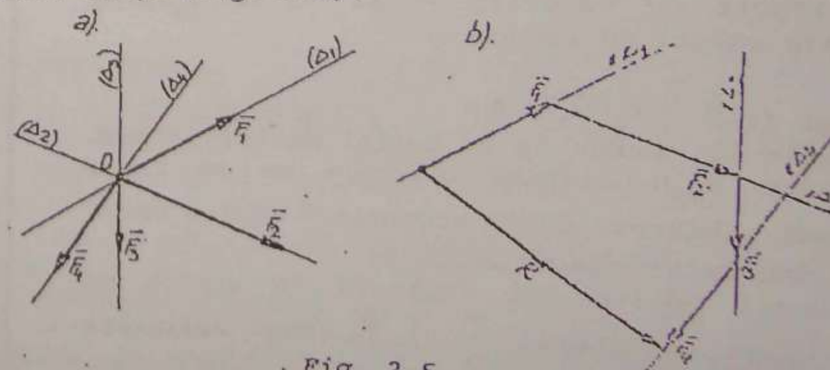


Fig. 2.5

b) $\bar{R} = 0$. Sistemul de forțe concurente este în echilibru.

Grafic acest lucru se exprimă prin faptul că poligonul forțelor este închis - originea primei forțe coincide cu extremitatea ultimei (fig. 2.6).

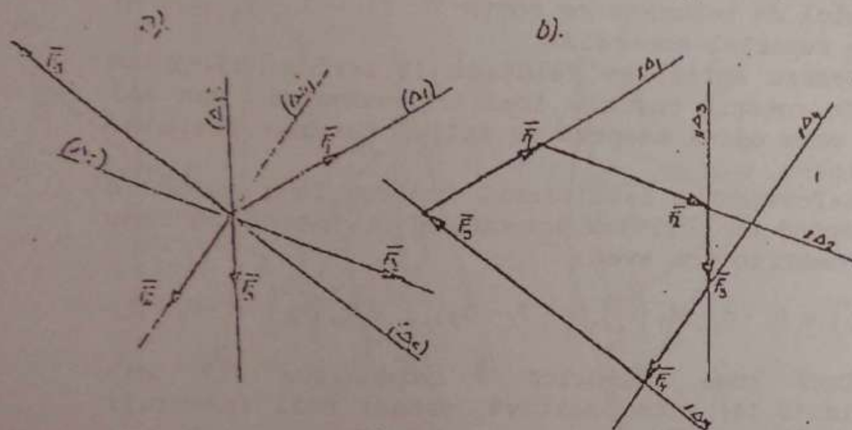


Fig. 2.6

Analitic echilibrul unui astfel de sistem se exprimă prin ecuația vectorială $\bar{R} = 0$, care, ținând seama de relațiile (1.13) și (1.13'), este echivalentă cu trei ecuații scalare de echilibru în spațiu:

$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$
$$R_y = \sum F_{iy} = 0 \qquad (2.10)$$
$$R_z = \sum F_{iz} = 0$$

și două ecuații scalare de echilimbru în plan:

$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$
$$R_y = \sum F_{iy} = 0 \qquad (2.11)$$

Prin urmare, echilibrul unui sistem de forțe concurente se exprimă prin trei ecuații scalare de echilibru în spațiu (2.10) și prin două ecuații de echilibru în plan (2.11).

2.5.2 Reducerea sistemelor de forțe coplanare

O mulțime de forțe $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$ ale căror suporturi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sunt conținute într-un plan (π) formează un sistem de forțe coplanare (fig.2.7).

În rport cu un punct O arbitrar ales în planul (π), sistemul de forțe se reduce la o rezultantă $\bar{R}$ conținută în planul forțelor și la un vector moment rezultant $\overline{M_0}$ perpendiculare pe plan (și pe rezultanta $\bar{R}$):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}; \quad \overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i} \qquad (2.12)$$

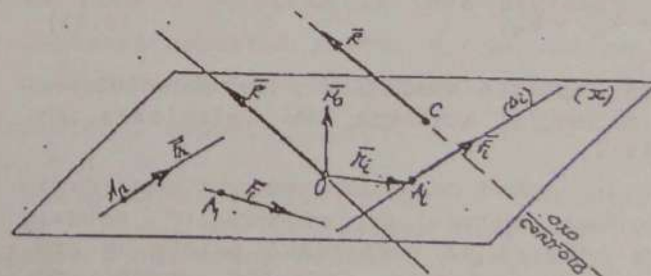


Fig. 2.7

Componentele torsorului de reducere $\bar{R}$ și $\overline{M_0}$ date prin relațiile vectoriale (2.12) pot fi determinate analitic și grafic.

2.5.2.a *Reducerea sistemelor de forțe coplanare - soluție analitică*

Se alege sistemul de referință cartezian cu originea în polul O de reducere și cu axele Ox și Oy conținute în planul forțelor (2.8).

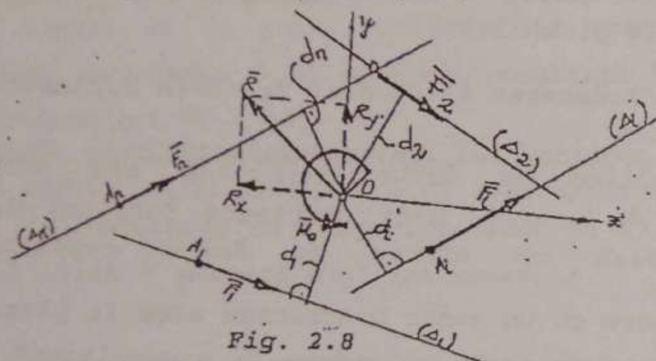


Fig. 2.8

Proiectând forțele $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$ pe axele Ox și Oy se obțin scalarii F_{ix}, F_{iy} (i = 1, 2, ..., n) a căror sume algebrice $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$ reprezintă proiecțiile rezultantei $\overline{R}$ pe aceleași axe. Vom avea deci:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} \cdot \qquad (2.13)$$

Cunoscând expresia analitică a rezultantei $\overline{R}$, modulul și direcția acesteia se calculează cu relațiile(1.14').

Momentul $\overline{M}_o$ având ca efect mecanic o mișcare de rotație în jurul polului de reducere „O", uzual, în literatura tehnică se reprezintă printr-un arc de cerc orientat, săgeata indicând sensul de rotație (fig. 2.8).

Direcția (normala la planul forțelor) și sensul (cel al mișcării de rotație) momentului

fiind cunoscute, în practica calculului se urmărește numai determinarea modulului acestuia. În acest scop se folosește relația (1.16) care se extinde la toate forțele:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d_i \quad , \qquad (2.14)$$

d_i reprezentând lungimea perpendicularei coborâte din polul de reducere pe forța $\overline{F_i}$ (i = 1, 2, ..., n) sau pe suportul acesteia.

Pentru aplicarea relației (2.14) se alege un sens de rotație pozitiv (cel trigonometric sau cel orar) care odată adoptat se aplică tuturor forțelor din sistem.

Referindu-ne la sistemul indicat în figura 2.8 și alegând ca pozitive momentele ce rotesc în sens trigonometric vom avea:

$$M_O\left(\overline{F_1}\right) = F_1 \cdot d_1 ; M_O\left(\overline{F_2}\right) = -F_2 \cdot d_2 ; \ldots ; M_O\left(\overline{F_n}\right) = -F_n \cdot d_n$$

Dacă suma algebrică a termenilor $F_i d_i$ din relația (2.14) este pozitivă, sensul real (natural) al momentului $\overline{M_o}$ este același cu cel adoptat ca pozitiv pentru momentele forțelor $\overline{F_i}$; dacă aceeași sumă este negativă, sensul momentului $\overline{M_o}$ este invers celui ales ca pozitiv.

2.5.2.b Reducerea sistemelor de forțe coplanare - soluție grafică

Componentele torsorului de reducere $\overline{R}$, $\overline{M_o}$ ale unui sistem de forțe coplanare se pot determina grafic cu ajutorul poligonului forțelor și a poligonului funicular (fig. 2.9).

Fie sistemul de forțe $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3} \ldots \overline{F_n}$ acționând pe suporții $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots \Delta_n$, reprezentate grafic în figura 2.9,a (utilizând în acest scop o scară a lungimilor și o scară a forțelor) și un pol arbitrar de reducere O, ales în planul forțelor.

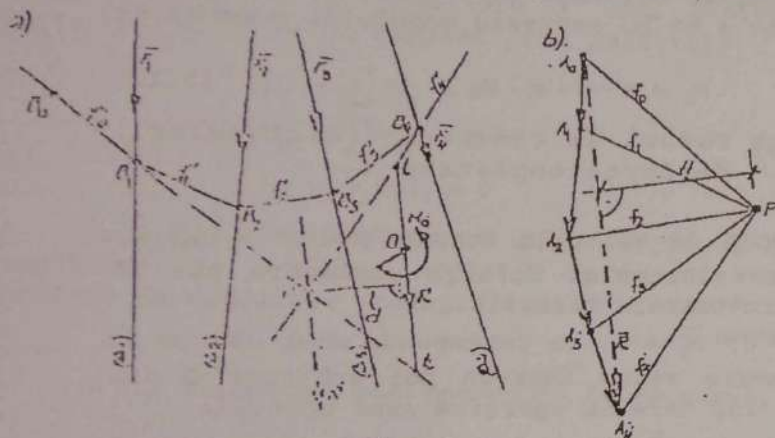


Fig. 2.9

Modulul și direcția forței rezultante $\overline{R}$ se obțin cu ajutorul poligonului forțelor a căror construcție este următoarea (fig. 2.9,b): se alege un punct arbitrar A_0 în care se reprezină un vector echipolent forței $\overline{F_1}$. Se obține astfel punctul A_1. Cu originea în A_1 se construiește vectorul echipolent al forței $\overline{F_2}$ și se obține punctul A_2. În A_2 se construiește vectorul echipolent al forței $\overline{F_3}$ și se obține punctul A_3. Pentru un sistem de n forțe se procedează identic cu toate forțele, obținându-se astfel punctul A_n. Unind punctul A_1 cu A_n se obține rezultanta $\overline{R}$ a sistemului de forțe ca modul $R = \left|\overline{A_0A_n}\right|$, direcție (direcția segmentului $\overline{A_0A_n}$) și sens (de la A_0 la A_n).

Pentru precizarea poziției acesteia în planul forțelor se efectuează următoarea construcție simplă: se alege un punct arbitrar P numit "pol" din care se duc dreptele PA_0, PA_1, PA_2 ... PA_n numite *raze polare*, notate pe desen cu f_1, f_2, f_3, ... ,f_n.

În baza construcției rezultate se observă că fiecare forță din poligonul forțelor poate fi exprimată vectorial prin câte două raze polare:

$$
\begin{aligned}
\overline{F_1} &= \overline{f_0} + \overline{f_1}\,; \\
\overline{F_2} &= -\overline{f_1} + \overline{f_2} \\
\overline{F_3} &= -\overline{f_1} + \overline{f_2} \qquad (2.15) \\
&\ldots \\
\overline{F_n} &= -\overline{f}_{n-1} + \overline{f}_n
\end{aligned}
$$

Pentru a înlocui în planul de acțiune al forțelor (2.9,a) vectorii $\overline{F_i}$ prin componentele acestora f_{i-1}, f_i se alege un punct arbitrar B_0 prin care se duce o paralelă la raza vectoare $\overline{f_0}$ până intersectează suportul forței $\overline{F_1}$; se obține punctul B_1. Ducând prin B_1 o paralelă la $\overline{f_1}$ până intersectează suportul forței $\overline{F_2}$; se obține punctul B_2 ş.a.m.d.

Unind aceste puncte se obține linia poligonală $B_1 - B_2 - B_3 \ldots B_n$, numită *poligon funicular* (forma de echilibru a cablurior funiculare acționate de forțe active concentrate).

Considerând acțiunea vectorilor $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}$ (din poligonul forțelor - fig.2.9,b) pe direcția laturilor poligonului funicular (B_0B_1, B_1B_2, ... , $B_{n-1}B_n$) se observă că fiecare forță din planul de acțiune al acestora (fig.2.9,a) este reprezentată prin suma corespunzătoare din membrul doi al ecuației (2.15).

Adunând membru cu membru egalitățile date de relațiile (2.15) se obține:

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n} = \overline{R} = \overline{f_0} + \overline{f_1} - \overline{f_1} + \overline{f_2} - \overline{f_2} + \ldots +$$

$$+\overline{f}_{n-1} - \overline{f}_{n-1} + \overline{f_n} = \overline{f_0} + \overline{f_n}$$

sau

$$\overline{R} = \overline{f_0} + \overline{f_n} \tag{2.16}$$

Relația (2.16) indică faptul că sistemul inițial de forțe (fig. 2.9,a) este echivalent cu rezultanta vectorilor $\overline{f_0'}$ și $\overline{f_n'}$ acționând pe direcțiile primei și ultimei laturi a poligonului funicular.

Cum suportul rezultantei a doi vectori trece prin punctul de intersecție a direcțiilor acestora, rezultă că forța rezultantă $\overline{R}$ a sistemului de forțe coplanare va trece prin punctul "C" de intersecție a primei și ultimei laturi a poligonului funicular.

Ducând prin "C" o paralelă la $\overline{A_0A_3}\left(\overline{A_0A_n}\right)$ din poligonul forțelor se obține poziția rezultantei $\overline{R}$ în planul forțelor (fig. 2.9,a)

Conform teoremei lui Varignon, momentul sistemului de forțe în raport cu polul "O" arbitrar ales în planul forțelor este egal cu momentul rezultantei $\overline{R}$ în raport cu același punct:

$$M_0 = R \cdot d \tag{2.17}$$

Ducând prin "O" o dreaptă paralelă paralelă la rezultanta $\overline{R}$ aceasta va intersecta prima și ultima latură a poligonului funicular în punctele k și ℓ ce determină segmentul $m = k\ell$.

Din asemănarea triunghiurilor $kC\ell$ cu PA_0A_3 vom avea: $\frac{m}{d} = \frac{R}{H}$ sau $R \cdot d = H \cdot m$ dar, $R \cdot d = M_0$, prin urmare

$$M_0 = m \cdot H \tag{2.18}$$

unde s-a notat cu H perpendiculara din P coborâtă pe $\overline{R}$ numită *distanță polară*.

Dacă scările forțelor și distanțelor utilizate în desen sunt a și b, expresia modulului momentului devine:

$$M_0 = a \cdot b \cdot m \cdot H \tag{2.19}$$

2.5.2.c Cazuri de reducere a sistemelor de forțe coplanare

În raport de valorile componentelor $\overline{R}$ și $\overline{M_0}$ la reducerea sistemelor deforțe coplanare pot fi întâlnite următoarele cazuri:

Cazul I $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M_0} \neq 0$, ce corespunde unui sistem de forțe coplanare redus într-un pol arbitrar O din planul forțelor care nu aparține axei centrale.

Rezultanta $\overline{R}$ este conținută în planul forțelor, iar momentul $\overline{M_0}$ este perpendicular pe același plan. Axa centrală este conținută în planul forțelor și este paralelă cu suportul rezultantei $\overline{R}$ (fig. 2.7).

Cazul II $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M_0} = 0$. Polul de reducere este situat pe axa centrală care este coliniară cu suportul rezultantei $\overline{R}$.

Cazul III $\overline{R} = 0$; $\overline{M_0} \neq 0$. Sistemul redus este alcătuit din unul sau mai multe cupluri acționând în planul de acțiune al forțelor.

Cazul IV $\bar{R} = 0$; $\bar{M}_0 = 0$ corespunde sistemelor de forţe coplanare în echilibru.

Având în vedere expresia vectorului $\bar{R}$ dată de relaţia (2.13) şi a momentului $\overline{M_0}$ dată de relaţia (2.14), condiţia de echilibru a unui sistem de forţe coplanare se va exprima prin relaţiile:

$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$
$$R_y = \sum F_{iy} = 0 \qquad (2.20)$$
$$M_0 = \sum F_i d_i = 0$$

În concluzie, echilibrul unui sistem de forţe coplanare se exprimă analitic prin 3 ecuaţii scalare de echilibru (relaţiile 2.20).

2.5.3 Reducerea sistemelor de forţe paralele

Un sistem de forţe $\overline{F_i}$ (i = 1, 2, ... , n) ale căror suporturi Δ_i sunt paralele cu o direcţie fixă din spaţiu formează un sistem de forţe paralele.

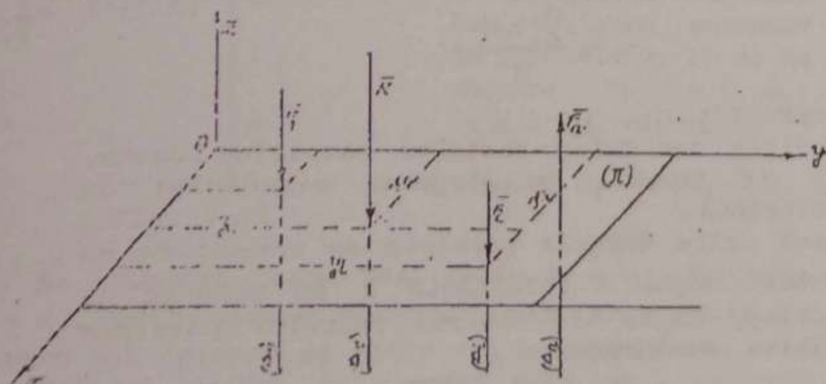


Fig. 2.10

Reducând forţele menţionate în raport cu un pol arbitrar O (fig. 2.10) se obţine:

- o forţă rezultantă $\bar{R}$ având direcţia paralelă cu suporturile forţelor $\overline{F_i}$ şi modulul egal cu suma algebrică a modulelor forţelor sistemului.

$$R = \sum F_i \qquad (2.21)$$

- un moment $\overline{M_0}$ perpendicular pe direcţia rezultantei $\bar{R}$, având o direcţie oarecare în planul π normal pe forţe şi conţinând polul O de reducere. Alegând un sistem de referinţă Oxyz cu originea în punctul O şi planul xOy, acelaşi cu planul π, vectorul $\overline{M_0}$ va avea pe axele Ox şi Oy componentele:

$$M_{0x} = \sum y_i F_i, \qquad (2.23)$$
$$M_{0y} = \sum x_i F_i,$$

reprezentând momentele forţelor $\overline{F_i}$ în raport cu axele menţionate. Cunoscând valoarea acestora, modulul momentului $\overline{M_0}$ se calculează cu relaţia:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2} \qquad (2.23)$$

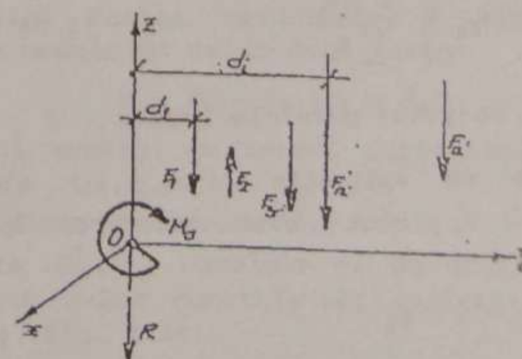


Fig. 2.11

Dacă forţele paralele $\overline{F_i}$ sunt coplanare, conţinute spre exemplu în planul yOz (fig. 2.11) distanţele acestora la axele Ox şi Oy au valorile $x_i = 0$; $y_i = d_i$, astfel că momentul lor în raport cu polul arbitrar O din planul forţelor este dat de relaţia

$$M_0 = M_{0x} = \sum F_i d_i \qquad (2.23')$$

În raport cu puncte $C(x_R, y_R)$ ale axei centrale (suportului Δ_R al rezultantei) un sistem de forţe paralele se reduce la o forţă unică $\overline{R}$, ($\overline{M_C} = 0$) paralelă cu direcţia comună a forţelor şi coliniară cu axa centrală având modulul dat de relaţia (2.21). Coordonatele $(x_R; y_R)$ ale unui punct de pe suportul rezultantei $\overline{R}$ se obţin exprimând teorema lui Varignon în raport cu axele Ox şi Oy. Se obţine $\sum F_i x_i = x_R R$; $\sum F_i y_i = y_R R$, din care rezultă:

$$x_R = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}, \quad y_R = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}. \qquad (2.24)$$

Dacă sistemul de forţe paralele este coplanar (fig. 2.11), conţinut în planul yOz, coordonata $x_C = 0$ astfel că suportul rezultantei Δ_R va fi dat de coordonata:

$$y_R = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} \qquad (2.24')$$

2.5.4 Centrul forţelor paralele legate

Dacă punctele de aplicaţie $A_i(x_i, y_i, z_i)$ ale forţelor paralele $\overline{F_i}$ sunt bine precizate pe suporturile lor, acestea formează un sistem de forţe paralele legate. Rezultanta acestora este un vector legat având punctul de aplicaţie $C(x_C, y_C, z_C)$ fix, bine precizat, numit *centrul forţelor paralele legate*.

Aplicând teorema lui Varignon în raport cu axele Ox, Oy, Oz aparţinând unui sistem de referinţă cartezian cu originea înt-un pol arbitrar O din spaţiu, se obţin: $\sum x_i F_i = x_C R$, $\sum y_i F_i = y_C R$, $\sum z_i F_i = z_C R$, din care rezultă:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{R}, \quad y_C = \frac{\sum y_i F_i}{R}, \quad z_C = \frac{\sum z_i F_i}{R}. \qquad (2.25)$$

Dacă sistemul de forţe legate este plan, conţinut în planul xOz, coordonatele punctelor de aplicaţie ale acestora vor fi $A_i(0, y_i, z_i)$.

Cu această particularizare ($x_i = 0$), din relaţiile (2.5) se obţin expresiile coordonatelor centrului forţelor paralele plane legate:

$$y_C = \frac{\sum y_i F_i}{R}, \quad z_C = \frac{\sum z_i F_i}{R}. \qquad (2.25')$$

Proprietăţi:

1. Poziţia centrului forţelor paralele legate, C, nu depinde de alegerea sistemului de referinţă.
2. Dacă toate forţele paralele se rotesc cu un anumit unghi α rezultanta $\overline{R}$ se roteşte cu acelaşi unghi iar centrul forţelor paralele rămâne neschimbat.

3. Dacă modulele tuturor forțelor se multiplică sau se divizează cu un scalar $\lambda \neq 0$, poziția centrului forțelor paralele nu se modifică.

2.5.5 Operații simple cu forțe paralele

a. Compunerea a două forțe paralele legate având același sens (fig. 2.12)

Fiind date forțele paralele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ având cunoscute punctele de aplicație în A_1 și A_2 se cere modulul și punctul de aplicație al rezultantei acestora $\bar{F}$ (direcția și sensul ei fiind același cu cel al forțelor $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$).

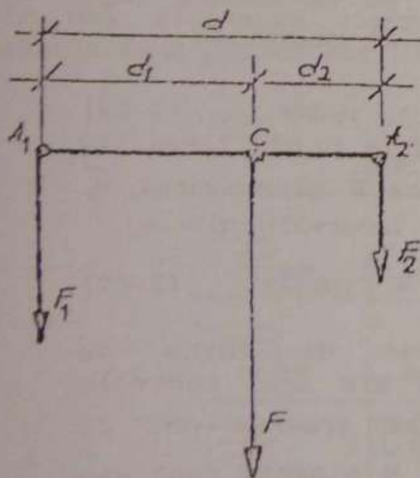


Fig. 2.12

Pentru rezolvarea problemei se notează cu d_1, d_2 și d distanțele (lungimile perpendicularelor) dintre suportul forțelor $\overline{F_1} : \bar{F}$, $\overline{F_2} : \bar{F}$ și respectiv $\overline{F_1} : \overline{F_2}$.

Aplicând teorema lui Varignon succesiv în punctele A_1 și A_2 se obține: $F_2 \cdot d = F \cdot d_1$; $F_1 \cdot d = F \cdot d_2$ din care rezultă $d_1 = \frac{F_2}{F} d$; $d_2 = \frac{F_1}{F} d$.

Se observă ușor că dacă $F_2 < F_1$ distanța $d_2 > d_1$, prin urmare centrul celor două forțe se găsește mai aproape de forța cea mai mare.

Modulul forței rezultante este egal cu suma acestora:

$$F = F_1 + F_2$$

b. Compunerea a două forțe paralele legate de sensuri opuse (fig. 2.13)

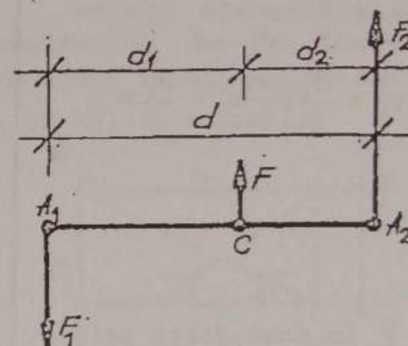


Fig. 2.13

Fie $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ două forțe paralele legate de sensuri contrare și $\bar{F}$ rezultanta acestora. Cu notațiile din figură, teorema lui Varignon aplicată în punctele A_1 și A_2 se exprimă prin relațiile:

$$F_2 \cdot d = F \cdot d_1;$$
$$F_1 \cdot d = F \cdot d_2,$$

din care rezultă

$$d_1 = \frac{F_2}{F} d; \quad d_2 = \frac{F_1}{F} d.$$

Făcând raportul celor două distanțe se obține:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

În consecință, centrul C al forțelor paralele împarte segmentul A_1A_2 în părți invers proporționale cu mărimile forțelor componente.

Modulul forței rezultante $\bar{F}$ este egal cu diferența modulelor celor două forțe:

$$F = F_1 - F_2 \quad (F_1 > F_2)$$

iar sensul același cu sensul forței având modulul mai mare.

c. Descompunerea unei forțe $\bar{F}$ în două componente $(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ paralele și de același sens cu forța dată având punctele de aplicație A_1 și A_2 cunoscute (fig. 2.14).

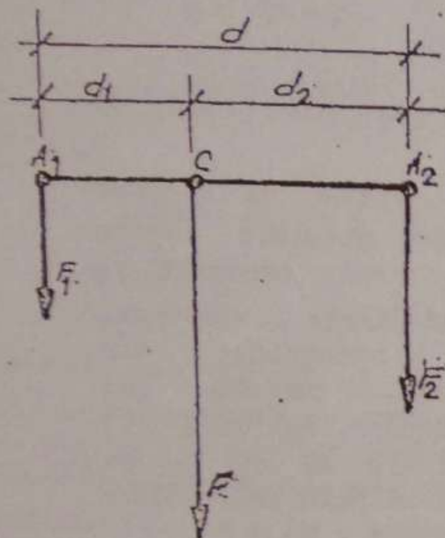


Fig. 2.14

Pentru obținerea forțelor $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ se aplică teorema lui Varignon în punctele A_1 și A_2. Se obțin astfel relațiile:

$F_2 \cdot d = F \cdot d_1$; $F_1 \cdot d = F \cdot d_2$

din care

$$F_1 = \frac{d_2}{d} F; \quad F_2 = \frac{d_1}{d} F.$$

d. Descompunerea unei forțe $\bar{F}$ în două forțe paralele $(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ de sensuri opuse cu forța dată și având punctele de aplicație cunoscute A_1 și A_2 (fig. 2.15).

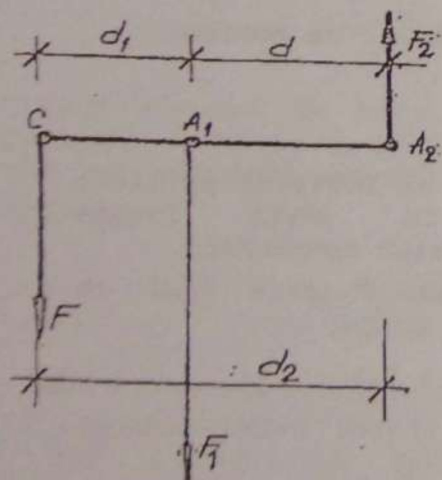


Fig. 2.15

Cunoscând forța $\bar{F}$ și distanțele d_1, d_2 și d, se aplică teorema lui Varignon în punctele A_1 și A_2. Se obține:

$F \cdot d_1 = F_2 \cdot d$;

$F \cdot d_2 = F_1 \cdot d$ din care

$$F_1 = \frac{d_2}{d} F;$$

$$F_2 = \frac{d_1}{d} F$$

2.5.6 Reducerea sistemelor de forțe paralele continuu distribuite

Fie un sistem de forțe continue paralele și normale pe o axă Ox a căror lege de variație este dată de p = p(x) și un element diferențial al axei, dx având abscisa x (fig. 2.16).

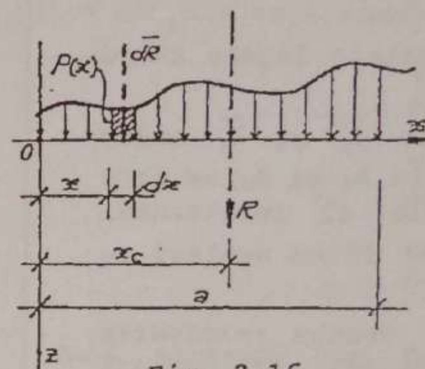


Fig. 2.16

Cum segmentul dx poate fi luat oricât de mic, forțele p(x) acționând asupra acestuia se pot considera constante. Reduse în raport cu punctul O acestea vor avea ca elemente ale torsorului o forță elementară $\overline{dR}$ și un moment $\overline{dM_0}$, dat de relațiile:

$$\overline{dR} = \overline{p(x)}dx; \quad \overline{dM_0} = x \cdot \overline{p(x)}dx \qquad (2.26)$$

Integrând membru cu membru funcțiile (2.26) între limitele O și a se obține rezultanta $\bar{R}$ și momentul $\overline{M_0}$ al forțelor continue acționând pe intervalul O – a.

$$R = \int_0^a p(x)dx \quad ; \quad M_0 = \int_0^a xp(x)dx \qquad (2.27)$$

Dacă reducerea sistemului de forțe se efectuează în raport cu puncte ale axei centrale "C" momentul $\overline{M_0}$ este zero iar acestea pot fi înlocuite cu o rezultantă unică $\bar{R}$ plasată după axa centrală, definită prin abscisa x_R. Pentru determinarea acesteia se exprimă teorema lui Varignon în punctul O: $M_0 = x_c \cdot R$ din care

$$x_c = M_0/R \qquad (2.28)$$

Înlocuind în relația (2.28) valorile lui M_0 și R date de relațiile (2.27) se obține:

$$x_C = \int_0^a x p(x)dx \Big/ \int_0^a p(x)dx \qquad (2.29)$$

Observând că $\int_0^a p(x)dx$ reprezintă suprafața pe care sunt distribuite forțele continue iar x_C poziția centrului de greutate al acesteia rezultă că forțele paralele continue *pot fi înlocuite prin forțe concentrate echivalente*, (cu același efect mecanic ca și forța continuă) *având intensitatea egală cu aria suprafeței pe care sunt distribuite, paralele cu acestea și trecând prin centrul de greutate al suprafeței menționate*. În domeniul construcțiilor cele mai frecvente tipuri de încărcări continue paralele sunt prezentate în figura 2.17.

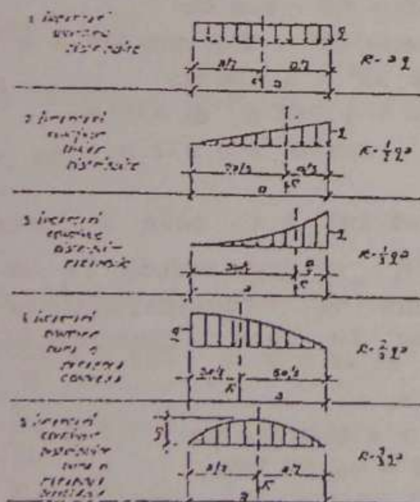


Fig. 2.17

2.6 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 2.6.1

Un sistem de forțe acționează asupra unei plăci de formă dreptunghiulară ca în figura 2.18.

Se cer elementele torsorului de reducere ale sistemului de de forțe în raport cu polii de reducere O_1 și O_2. Se dau F_1 = 10 kN; F_2 = 5 kN; F_3 = 20 kN; $F_4 = 2\sqrt{45}$ kN.

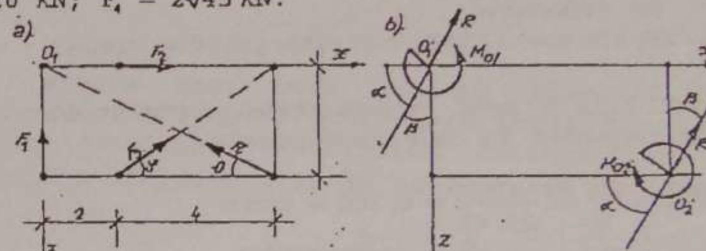


Fig. 2.18

Rezolvare

Se alege sistemul de referință Oxz ca în figură.

a) Torsorul de reducere în O_1:

$$R_x = \sum_1^4 F_{ix} = 0 + F_2 + F_3\cos\varphi - F_4\cos\theta =$$

$$= 5 + 20\cdot\frac{4}{5} - 2\cdot\sqrt{45}\cdot\frac{6}{\sqrt{45}} = 9\text{kN}$$

$$R_z = \sum_1^4 F_z = -10 + 0 - F_3\cos(90-\varphi) - F_4\cos(90-\theta) =$$

$$= -10 - 20\sin\varphi - 2\cdot\sqrt{45}\sin\theta =$$

$$= -10 - 20\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\sqrt{45}\cdot\frac{3}{\sqrt{45}} = -28\text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = 29,41\text{kN}$$

Alegând ca sens pozitiv pentru momente sensul trigonometric vom avea:

$$M_{O1} = 3F_3 \cdot \cos\varphi + 2F_3 \cdot \sin\varphi) = F_3(3\cos\varphi + 2\sin\varphi) =$$
$$= 20\left(3 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5}\right) = 72\,\text{kNm}$$

b) Torsorul de reducere în O_2:

R = 29,41 kN (nu se modifică cu modificarea polului de reducere)

$M_{O2} = -6F_1 - 3F_2 - 4F_3\sin\alpha = -123\,\text{kNm}$ (roteşte în sens orar)

În figura 2.18,b sunt reprezentate elementele torsorului de reducere în cele două puncte.

$$\cos(\bar{R}, Ox) = \frac{R_x}{R} = \frac{9}{29,41} = 0,306 = \cos\alpha$$

$$\cos(\bar{R}, Oz) = \frac{R_z}{R} = -\frac{28}{29,41} = -0,925 = \cos\beta$$

Rezultă $\alpha = 72°10'$; $\beta = 17°50'$

Exemplul 2.6.2

Un sistem de forţe F_1 = 15 kN, F_2 = 8 kN şi F_3 = 50 kN acţionează asupra unui panou pe direcţiile şi cu sensurile indicate în figura 2.19. Se cere să se identifice particularitatea sistemului de forţe şi corespunzător acesteia să se facă reducerea lor într-un punct arbitrar "O".

Rezolvare

Se observă că două câte două din forţele sistemului sunt egale în module, de sensuri opuse şi acţionează pe suporţi paraleli distincţi. În consecinţă, sistemul de forţe este compus din 3 cupluri: $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$; $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$ şi $(\bar{F}_3, -\bar{F}_3)$.

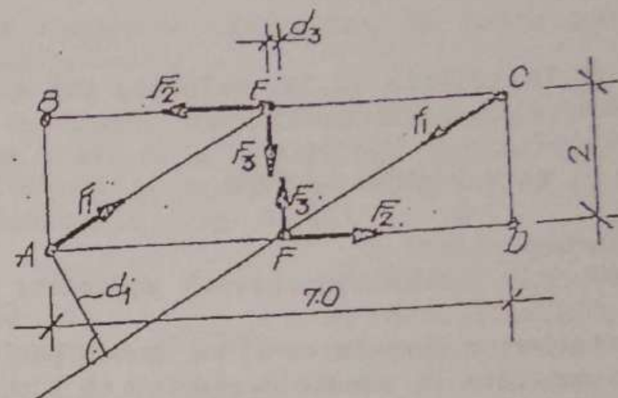


Fig. 2.19

Pentru determinarea braţului de pârghie al cuplului $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$ se coboară din A o perpendiculară pe direcţia CF. Din considerente geometrice vom avea:

$d_1 = AF \cdot \cos(90 - \alpha) = AF \cdot \sin\alpha = 0,5 \cdot AF$

$CF = AE$; $AF = AD - CF \cdot \cos\alpha$;

$CF = AE = AD / \cos 60° = 2 / \cos 60° = 4$ m;

$AF = 7 - 4 \cdot \cos 30° = 3,536$ m;

$d_1 = 0,5 \times 3,536 = 1,768$ m; $d_2 = 2$ m;

$d_3 = 7 - 2 \cdot AE \cdot \cos 30° = 0,072$ m.

Conform paragrafului 2.4, cele 6 forţe $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1, \bar{F}_2, -\bar{F}_2, \bar{F}_3, -\bar{F}_3)$ se vor reduce la un cuplu rezultant de moment M_C. Considerând pozitive momentele ce rotesc în sens trigonometric, se obţine:

$M_C = -F_1d_1 + F_2d_2 + F_3d_3 =$

$= -15 \times 1,768 + 8 \times 2 + 0,072 \times 50 =$

$= -26,52 + 16 + 3,60 = -6,92$ kNm

(semnul minus indică faptul că momentul M_C roteşte în sens orar)

Exemplul 2.6.3

Pe muchiile unui cub de latură a (fig. 2.20) şi masă neglijabilă acţionează forţele F_1 = 5 kN; F_2 = 4 kN; F_3 = 8 kN şi F_4 = 6 kN.

Se cer elementele torsorului de reducere a sistemului de forţe în polul arbitrar "O".

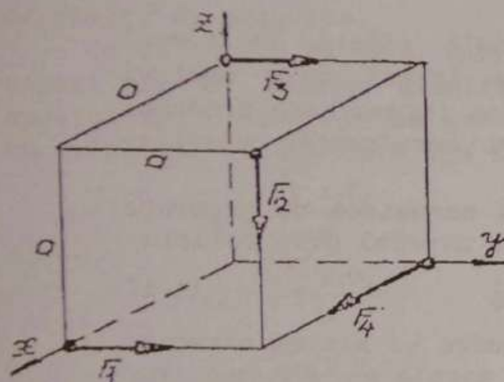


Fig. 2.20

Rezolvare

Se alege un sistem de referinţă Oxyz cu originea în polul de reducere O. Conform aliniatului 2.2, sistemul de forţe se reduce la o rezultantă $\bar{R}$ având forma din relaţia (2.3) şi un moment M_O dat de expresia (2.4).

Vom avea:

$$R_x = \sum_{1}^{4} F_{ix} = F_4 = 6\ kN;\ R_y = F_1 + F_2 + F_3 = 5 + 8\ 13\ kN,$$

$$R_z = -F_2 = -4\ kN$$

cu care

$$\bar{R} = 6\bar{i} + 13\bar{j} - 4\bar{k},\ R = \sqrt{36 + 169 + 16} = 14,866\ kN$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = 0,403 \rightarrow \alpha = 66°12'$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = 0,874 \rightarrow \beta = 29°1'$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = 0,269 \rightarrow \gamma = 74°23'$$

$$\overline{M_O} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & a & a \\ 0 & 0 & F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & a \\ 0 & F_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & a & 0 \\ F_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -a\left(-\bar{k}F_1\right) + F_2\left(a\bar{i} - a\bar{j}\right) - F_3 a\bar{i} + F_4 a\bar{k} =$$

$$= a(F_2 - F_3)\bar{i} - aF_2\bar{j} + aF_1\bar{k} = -4a\bar{i} - 4a\bar{j} + 5a\bar{k}$$

$$M_O = \sqrt{a^2(16 + 16 + 25)} = 7,550 \cdot a$$

Exemplul 2.6.4

Asupra unei bare liniare (fig. 2.21) de greutate neglijabilă acţionează forţa F = 100 kN, forţa continuă, distribuită triunghiular, q = 20kN/m şi forţa P = 60 kN ce formează un unghi α = 30° cu bara.

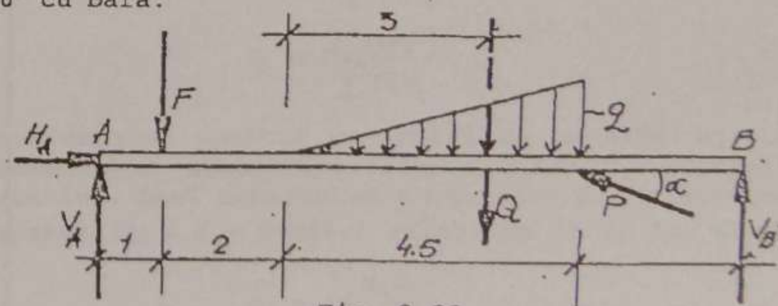


Fig. 2.21

Se cere să se determine forţele H_A, V_A şi V_B astfel încât acestea împreună cu forţele date să formeze un sistem echivalent cu zero.

Rezolvare

Se exprimă condiţia de echivalenţă dată de relaţia (2.20), înlocuind forţele continue prin forţa concentrată:

$$Q = \frac{4,5 \times q}{2} = \frac{4,5 \times 20}{2} = 45\ kN,$$ vom avea:

$$R_x = \sum F_{ix} = H_A - P\cos\alpha = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = V_A - F - Q + P\sin\alpha + V_B = 0$$

$$M_A = -1F - 6Q + 7{,}5P\sin\alpha + 10V_B = 0,$$

Rezolvând ecuaţiile de mai sus se obţine:

$$V_B = \frac{1}{10}(1 \cdot 100 + 6 \cdot 45 - 7{,}5 \cdot 60\sin 30^\circ) = 59{,}50\ kN$$

$$V_A = \frac{1}{10}(9 \cdot 100 + 4 \cdot 45 - 2{,}5 \cdot 60\sin 60^\circ) = 115{,}50\ kN$$

$$H_A = P\cos 30^\circ = 60\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}\ N$$

CAPITOLUL 3

CENTRE DE GREUTATE (MASĂ)

3.1 DETERMINAREA CENTRELOR DE GREUTATE

Orice particulă materială aflată în câmpul gravitaţional terestru este atrasă spre centrul Pământului cu o forţă având ca intensitate produsul dintre masa particulei *m* şi acceleraţia gravitaţională $\bar{g}$.

Generic, aceasta poartă denumirea de greutate a particulei materiale. Ea se exprimă prin relaţia:

$$\bar{G}_i = m_i\bar{g} \qquad (3.1)$$

Să considerăm în continuare un sistem oarecare de particule (corpuri) având masele $m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n$, şi greutăţile $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_i, ..., \bar{G}_n$ (fig. 3.1).

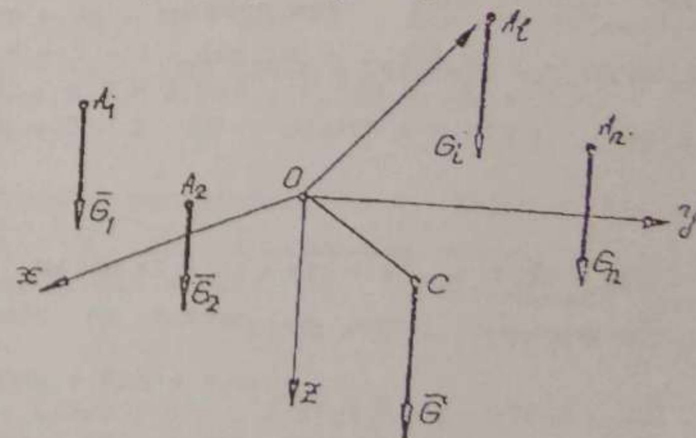


Fig. 3.1

Cum distanțele dintre acestea sunt neglijabile în raport cu raza Pământului, forțele $\bar{G}_i$ pot fi considerate (cu suficientă precizie) ca forțe paralele legate având același sens (spre centrul globului terestru).

Centrul sistemului acestora poartă denumirea de *centru de greutate*.

Ca un centru al unor forțe paralele legate, în raport cu un sistem arbitrar de referință din spațiul Oxyz, centrul de greutate se va determina cu relațiile (2.25) care iau forma

$$x_G = \frac{\sum x_i G_i}{G}$$
$$y_G = \frac{\sum y_i G_i}{G} \qquad (3.2)$$
$$z_G = \frac{\sum z_i G_i}{G}$$

în care $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n = \sum_1^n G_i$ iar x_i, y_i, z_i reprezintă coordonatele punctului de aplicație a forței G_i în sistemul de referință adoptat. Dacă în relațiile (3.2) se înlocuiesc forțele G_i cu expresiile acestora date de relația (3.1), coordonatele centrului de greutate devin:

$$x_G = \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_i m_i}{M}$$
$$y_G = \frac{\sum y_i m_i g}{\sum m_i} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum y_i m_i}{M} \qquad (3.3)$$
$$z_G = \frac{\sum z_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum z_i m_i}{M}$$

Relațiile (3.3) definesc poziția centrului de greutate a unui sistem material pe baza maselor acestuia, motiv pentru care acest punct se mai numește și *centru de masă*. Centrul de greutate al unui corp este deci identic cu centrul lui de masă. În cazul corpurilor omogene, masele m_i pot fi experimate prin relația:

$$M_i = \rho_i V_i \qquad (3.4)$$

în care V_i și ρ_i au semnificația de volum și respectiv densitate a corpului (punctului material). Cu această substituție expresia coordonatelor centrului de greutate devine:

$$x_G = \frac{\sum x_i \rho_i V_i}{\sum \rho_i V_i},$$
$$y_G = \frac{\sum y_i \rho_i V_i}{\sum \rho_i V_i}, \qquad (3.5)$$
$$z_G = \frac{\sum z_i \rho_i V_i}{\sum \rho_i V_i},$$

care exprimă poziția centrului de masă cu ajutorul elementelor geometrice ale sistemului (corpului) material. Dacă densitatea corpurilor din sistem este aceeași ($\rho_i = \rho = \text{const.}$) relațiile (3.5) iau forma:

$$x_G = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i},$$
$$y_G = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}, \qquad (3.6)$$
$$z_G = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}.$$

În cazul corpurilor de formă prismatică având ariile bazelor A_i și înălțimea h constantă, volumele acestora au valorile $V_i = A_i h$, iar expresiile centrului de greutate, date de relațiile (3.6), devin:

$$x_G = \frac{\sum x_i A_i h}{\sum A_i h} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i},$$
$$y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}, \qquad (3.7)$$
$$z_G = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}.$$

Dacă suprafaţa A este conţinută într-un singur plan, spre exemplu în planul xOy, distanţele z_i sunt egale cu zero, iar centrul de greutate $G(x_G, y_G)$ se află în planul acestuia.

Din relaţiile (3.7) cu $z_i = 0$ rezultă:

$$x_G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \; y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \qquad (3.8)$$

Există o altă serie de corpuri (firele), de secţiune constantă A şi lungimi diferite ℓ_i.

Volumele acestora au expresia $V_i = A \cdot \ell_i$. Coordonatele centrului lor de masă rezultă operând această particularitate în relaţiile

$$x_G = \frac{\sum x_i A \cdot \ell_i}{\sum A_i \cdot \ell_i} = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i},$$
$$y_G = \frac{\sum y_i A \ell_i}{\sum A \ell_i} = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i}, \qquad (3.9)$$
$$z_G = \frac{\sum z_i A \ell_i}{\sum A \ell_i} = \frac{\sum z_i \ell_i}{\sum \ell_i}.$$

Atunci când un astfel de sistem este conţinut într-un singur plan, spre exemplu în planul xOy, centrul de greutate al acestuia se află în planul respectiv.

Coordonatele acestuia se obţin din relaţiile (3.9) făcând $z_i = 0$:

$$x_G = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i}; \; y_G = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i} \qquad (3.10)$$

Relaţiile (3.6) şi (3.7) sunt utilizate uzual pentru determinarea centrelor de greutate a volumelor şi suprafeţelor de formă complexă.

În acest scop volumele şi suprafeţele respective se divizează în volume elementare V_i (cuburi, prisme etc.) şi respectiv arii elementare (dreptunghiuri, triunghiuri etc.) a căror mărime şi a căror poziţie a centrelor de greutate sunt cunoscute din Geometrie.

Se alege apoi un sistem cartezian de referinţă (arbitrar ca poziţie) şi se exprimă coordonatele x_i, y_i, z_i ale volumelor V_i şi ariilor A_i, obţinându-se astfel toţi termenii din expresiile (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) şi (3.10) după caz.

Pentru exemplificare, vom exprima mai jos coordonatele centrului de greutate a corpului din figura 3.2 în raport cu sistemul cartezian cu axele O_x, O_y şi O_z, dirijate după muchiile prismei de laturi $a_i b_i c_i$.

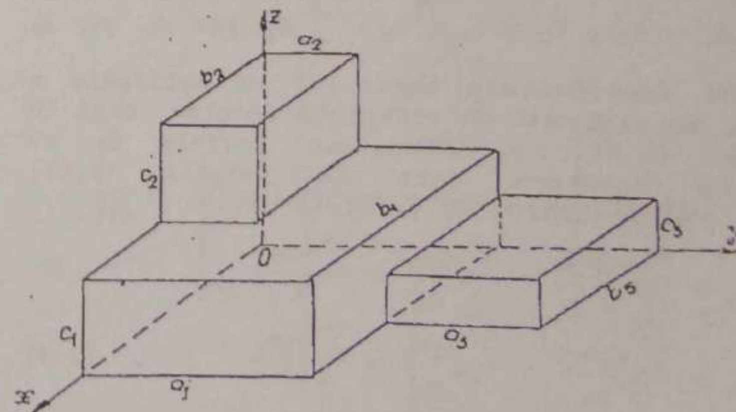


Fig. 3.2

Observând că geometria volumului dat cuprinde 3 corpuri pe care le vom nota cu 1, 2 şi 3, expresiile coordonatelor date de relaţie (3.6) iau forma:

$$x_G = \frac{x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

$$y_G = \frac{y_1V_1 + y_2V_2 + y_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3} \qquad (3.11)$$

$$z_G = \frac{z_1V_1 + z_2V_2 + z_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

în care $x_1 = 0,5b_1$; $y_1 = 0,5a_1$; $z_1 = 0,5c_1$; $x_2 = 0,5b_2$; $y_2 = 0,5a_2$; $z_2 = c_1+0,5c_2$; $x_3 = 0,5b_3$; $y_3 = a_1+0,5a_3$; $z_3 = 0,5c_3$; $V_1 = a_1b_1c_1$; $V_2 = a_2b_2c_2$; $V_3 = a_3b_3c_3$.

Pentru suprafaţa indicată în figura 3.3, coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_G = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad (3.12)$$

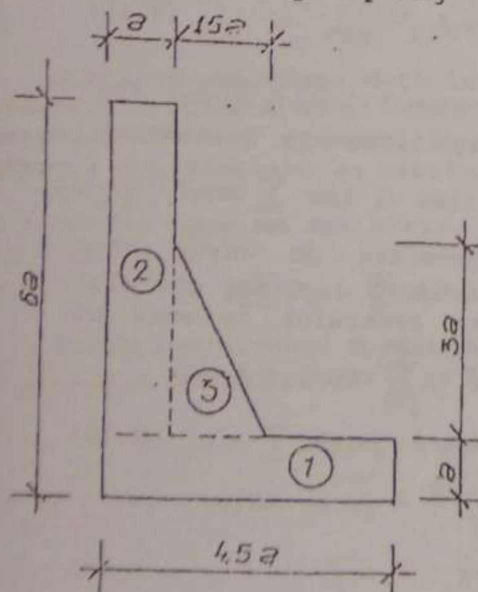


Fig. 3.3

în care:

$A_1=4,5a \times a=4,5a^2$;

$A_2=\frac{1}{2}\,1,5a \times 3a=2,25a^2$;

$A_3=5a \times a=5a^2$;

$x_1 = 2,25\ a$;

$x_2=a+\frac{1}{3}\,1,5a=1,5a$;

$x_3 = 2,25a$;

$y_1=0,5a$;

$y_2=a + \frac{1}{3}3a = 2a$;

$y_3=a + 2,5a=3,5a$.

3.2 PROPRIETĂŢILE CENTRELOR DE GREUTATE

a) Poziţia centrului de masă al unui sistem de puncte (corpuri) materiale nu depinde de poziţia sistemului de referinţă ales.

b) Poziţia centrului de masă nu se modifică dacă masele sistemului dat se amplifică sau se micşorează în acelaşi raport.

c) Dacă un corp admite un plan de simetrie (fig. 3.4,a) o axă de simetrie (fig. 3.4,b,c,d) sau un centru de simetrie (fig.3.4,e,f), centrul de greutate al acestuia se va găsi în acel plan, pe acea axă sau în acel centru (v. fig. 3.4).

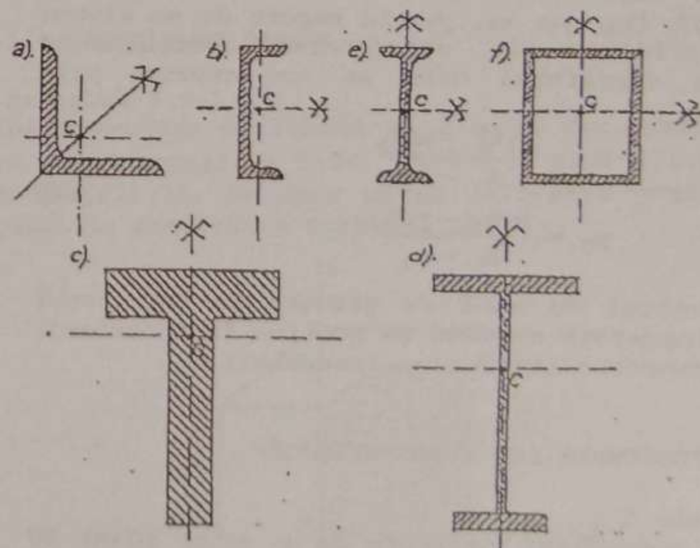


Fig. 3.4

d) Dacă un volum dat V poate fi considerat ca obţinut dintr-un volum V_1 prin scăderea unui alt volum V_2 (a se vedea exemplul 3.4.1) şi dacă se

cunosc coordonatele centrelor de greutate ale acestora (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) în raport cu un sistem cartezian arbitrar de referință Oxyz, coordonatele centrului de greutate ale volumului V se exprimă prin relația:

$$x_G = \frac{x_1V_1 - x_2V_2}{V_1 - V_2}$$

$$y_G = \frac{y_1V_1 - y_2V_2}{V_1 - V_2} \qquad (3.13)$$

$$z_G = \frac{z_1V_1 - x_2V_2}{V_1 - V_2}$$

e) Dacă o suprafață A poate fi considerată ca obținută dintr-o arie A_1 prin scăderea unei arii A_2 și dacă se cunosc coordonatele centrelor de masă ale acestora (x_1, y_1; x_2, y_2) în raport de un sistem cartezian arbitrar xOy, coordonatele centrului de greutate a suprafeței date se vor exprima prin relațiile:

$$x_G = \frac{x_1A_1 - x_2A_2}{A_1 - A_2}$$

$$y_G = \frac{y_1A_1 - y_2A_2}{A_1 - A_2} \qquad (3.14)$$

f) Centrul de masă se găsește în interiorul oricărei suprafețe convexe ce conține în interiorul ei toate punctele sistemului (corpului).

3.3 TEOREMELE LUI GULDIN-PAPPUS

Teorema I

Aria suprafeței generate de o curbă plană BD care se rotește în jurul unei axe din planul curbei (dar care nu intersectează curba) este egală cu lungimea curbei înmulțită cu lungimea arcului descris de centrul de greutate al curbei (fig. 3.5).

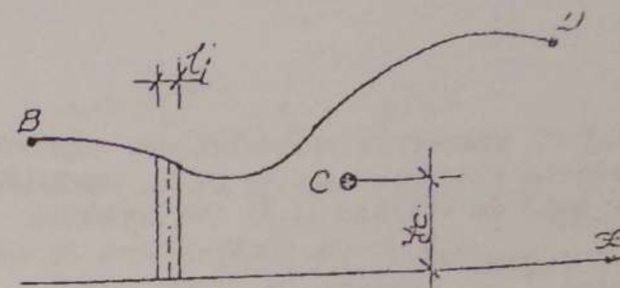


Fig. 3.5

Demonstrație

Conform relației (3.9) $y_c = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i}$, care se mai scrie $y_c \sum \ell_i = \sum y_i \ell_i$.

Înmulțind fiecare membru al egalității de mai sus cu 2π și ținând seama că $\sum \ell_i = \ell$ reprezintă lungimea curbei BD, vom avea $2\pi \ell y_c = \sum_1^n 2\pi y_i \ell_i$ sau

$$2\pi y_c \ell = \sum_1^n 2\pi y_i \ell_i \qquad (3.15)$$

În relația (3.15), produsul $2\pi y_i \cdot \ell_i$ (vezi fig. 3.5) reprezintă o suprafață laterală elementară, circulară de rază y_i și lățime ℓ_i iar $\sum_{i=1}^n 2\pi y_i \ell_i$ aria laterală a suprafeței generate de curbă prin rotație. Similar, $2\pi y_c$ reprezintă lungimea cercului de rază egală cu ordonata centrului de masă al curbei. Vom avea deci $2\pi y_c \ell = \sum_{i=1}^n 2\pi y_i \ell_i = A$ sau

$$A = 2\pi y_c \cdot \ell \qquad (3.16)$$

Teorema a II-a

Volumul generat printr-o rotaţie completă a unei suprafeţe plane în jurul unei axe situate în planul suprafeţei (dar care nu intersectează suprafaţa) este egal cu mărimea ariei suprafeţei plane înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate a suprafeţei.

Demonstraţie

Fie suprafaţa delimitată de o curbă plană oarecare (fig. 3.6).

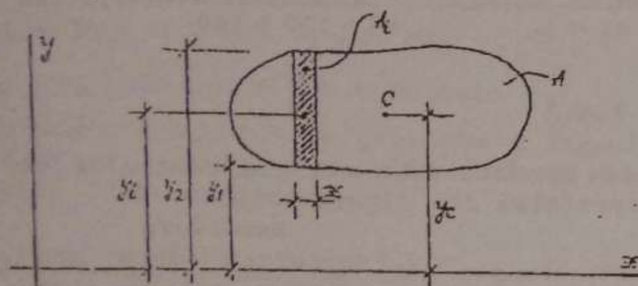


Fig. 3.6

Divizând suprafaţa dată într-un număr finit de suprafeţe elementare de arii A_i şi poziţii ale centrului de masă y_i, poziţia centrului de masă a întregii suprafeţe se va exprima prin relaţia (3.7)

$y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$ care se mai scrie

$$y_c \sum A_i = \sum y_i A_i \qquad (3.17)$$

Înmulţind fiecare membru al ecuaţiei (3.17) cu 2π şi având în vedere că $\sum A_i = A$, vom avea

$$2\pi y_c A = \sum 2\pi y_i A_i \qquad (3.18)$$

Dar $A_i = (y_2 - y_1)\Delta x$ şi $y_i = \frac{y_2 + y_1}{2}$, astfel că

$$2\pi y_i A_i = 2\pi \frac{y_2+y_1}{2} \cdot (y_2-y_1)\,\Delta x = \pi\left(y_2^2-y_1^2\right)\Delta x = \pi y_2^2\Delta x - \pi y_1^2\Delta x.$$

Cum $\pi y_2^2\Delta x$ şi $\pi y_1^2\Delta x$ reprezintă volumele cilindrilor elementari de raze y_2 şi y_1 şi cu înălţime Δx, suma $\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i A_i$ va reprezenta volumul total al corpului V generat prin rotirea curbei în jurul axei x. Cu precizările de mai sus, ecuaţia (3.18) ia forma

$$V = 2\pi y_c A \qquad (3.19)$$

care exprimă matematic teorema a II-a a lui Guldin-Pappus.

3.4 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 3.4.1

Dintr-un cub de latura de 4 m se decupează o prismă având suprafaţa bazei de 2x2 m şi înălţimea de 3m (fig. 3.7). Se cere să se calculeze poziţia centrului de greutate a corpului rămas.

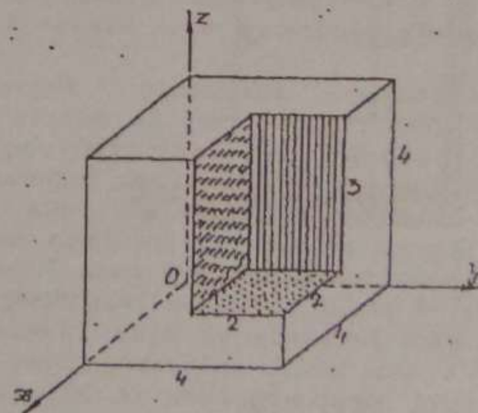


Fig. 3.7

Rezolvare

Fie $V_1 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ m³. Volumul cubului nedecupat şi $V_2 = 2 \times 2 \times 3 = 12$ m³ volumul prismei decupate. Alegând sistemul de referinţă ca în figură, centrele de greutate ale celor două volume vor fi: $x_1 = y_1 = z_1 = 2$m; $x_2 = y_2 = 3$m; $z_2 = 1+1,5 = 2,50$ m.

Utilizând relaţiile (3.11) vom avea:

$$x_G = \frac{x_1V_1 - x_2V_2}{V_1 - V_2} = \frac{2 \times 64 - 3 \times 12}{64 - 12} = \frac{92}{52} = \frac{23}{13} \text{ m}$$

$$y_G = \frac{y_1V_1 - y_2V_2}{V_1 - V_2} = \frac{2 \times 64 - 3 \times 12}{64 - 12} = \frac{23}{13} \text{m}$$

$$z_G = \frac{z_1V_1 - z_2V_2}{V_1 - V_2} = \frac{2 \times 64 - 2,5 \times 12}{64 - 12} = \frac{24,5}{52} \text{ m}$$

Exemplul 3.4.2

Se cere poziţia centrului de greutate pentru placa plană şi omogenă din figura 3.8.

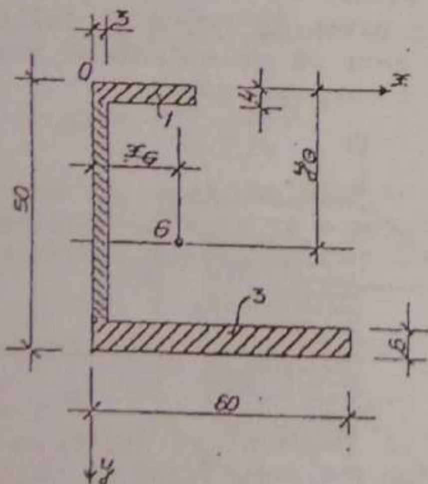


Fig. 3.8

Rezolvare

Se alege sistemul de referinţă xOy indicat în figură şi se divizează suprafaţa acesteia în 3 dreptunghiuri de arii: $A_1=20 \times 4=80$cm², $A_2=40 \times 3=120$cm² şi $A^3=60 \times 3=180$cm². Coordonatele curbelor de greutate ale acestora au valorile: $x_1=10$; $y_1=2$; $x_2=1,5$, $y_2 = 24$, $x_3 = 30$; $y_3 = 47$.

Folosind relaţiile (3.8) vom avea:

$$x_G = \frac{x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{10 \times 80+1,5 \times 120+30 \times 180}{80+ 120 + 180} = 16,789$$

$$y_G = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2 \times 80+24 \times 120+47 \times 180}{80 + 120 + 180} = 30,263$$

Exemplul 3.4.3

Se cere să se determine poziţia centrului de greutate al suprafeţei din figura 3.7.

Rezolvare

Suprafaţa dată prezintă o axă de simetrie verticală, conform proprietăţii c din aliniatul (3.2) centrul de masă al secţiunii se va găsi pe această axă. Alegând sistemul de referinţă cu axa ordonatelor Oy confundată cu axa de simetrie şi cu axa x tangentă laturii superioare a figurii, abscisa centrului de greutate va fi egală cu zero ($x_G = 0$).

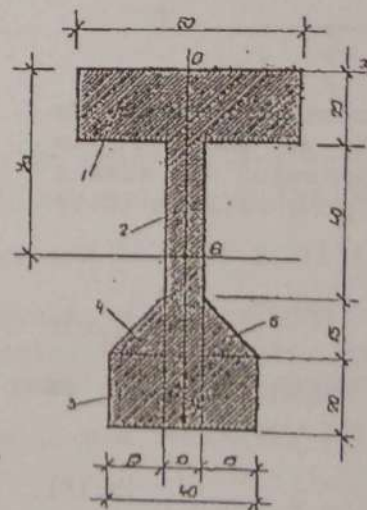


Fig. 3.9

Pentru determinarea ordonatei y_G se divizează figura în 3 dreptunghiuri, numerotate cu 1, 2 şi 3, având ariile: $A_1 = 60 \times 20 = 120\ cm^2$; $A_2 = (40+15) \times 10 = 550\ cm^2$; $A_3 = 40 \times 20 = 800\ cm^2$ şi două triunghiuri 4 şi 5 de arii egale $A_4 = A_5 = \frac{15 \times 15}{2} = 12,5\ cm^2$.

Centrele de greutate ale figurilor simple menţionate cu coordonatele:

$$y_1 = 10\ cm;\quad y_2 = 20 + \frac{55}{2} = 47,50 cm;$$

$$y_3 = 20 + 40 + 15 + 10 = 85\ cm;$$

$$y_4 = y_5 = 20 + 40 + \frac{2}{3}15 = 70\ cm.$$

Ordonata centrului de greutate a figurii date se obţine cu ajutorul celei de a doua ecuaţii a sistemului (3.8) care devine:

$$y_G = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} =$$

$$= \frac{10 \times 1200 + 47,5 \times 550 + 85 \times 800 + 2 \times 70 \times 112,5}{1200 + 550 + 800 + 112,5} = 45,775$$

CAPITOLUL 4

ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL

4.1 ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL LIBER

În domeniul mecanicii, prin punct material se înţelege un corp fără dimensiuni. Dacă acesta, sub acţiunea forţelor ce îi sunt aplicate, poate ocupa orice poziţie în *spaţiu*, el poartă denumirea de ***punct material liber***. Posibilitatea de a ocupa o astfel de poziţie conferă punctului material libertatea de a se deplasa după orice direcţie. O astfel de deplasare descompusă după axele unui sistem de referinţă cartezian Oxyz prezintă componente după axele Ox, Oy şi Oz, reprezentând translaţii în lungul acestora.

Cele 3 deplasări sus-menţionate reprezintă ***gradele de libertate*** ale punctului material în spaţiu.

Dacă asupra punctului material liber acţionează un sistem de forţe coplanare, acesta se va deplasa pe direcţia rezultantei forţelor. Componentele acestei deplasări pe axele unui sistem de referinţă xOy coplanar cu planul forţelor reprezintă două translaţii, una în lungul axei Ox şi alta în lungul axei Oy, reprezentând gradele de libertate ale punctului material liber în plan.

În consecinţă, faţă de sistemul cartezian de referinţe, *un punct material liber are 3 grade de libertate în spaţiu şi două grade de libertate în plan.*

Forţele ce acţionează asupra punctelor materiale formează totdeauna sisteme de forţe concurente (în spaţiu sau plan). Ca urmare a acestui fapt, echilibrul punctului material se va exprima

prin relaţia (2.10) şi (2.11) ce exprimă echivalenţa cu zero a sistemelor de forţe concurente.

Teoria echilibrului punctului material liber este folosită în domeniul tehnicii pentru rezolvarea următoarelor 3 tipuri de probleme:

a. Cunoscându-se sistemul de forţe ce acţionează asupra unui punct material, se cere determinarea poziţiei lui de echilibru.

Problemele de acest tip, numite şi *directe* au o soluţie unică, bine determinată ce se obţine cu ajutorul ecuaţiilor (2.10) sau (2.11), după caz.

Succesiunea operaţiilor necesare rezolvării acestora este următoarea:

- se aleg parametrii geometrici ai poziţiei de echilibru (de exemplu, coordonatele carteziene x, y, z) ale punctului;
- se exprimă echilibrul acestuia cu ajutorul ecuaţiilor sus-menţionate în care vor intra ca necunoscute parametrii geoemtrici aleşi;
- se rezolvă sistemul de ecuaţii şi se interpretează rezultatele.
  Dacă sistemul de ecuaţii admite o infinitate de soluţii, rezultă că punctul material studiat poate ocupa poziţia de echilibru într-o infinitate de puncte

b. *Dându-se* poziţia de echilibru a unui punct material se cer forţele (sistemele de forţe) ce menţin punctul în poziţia respectivă. Problemele de acest tip numite şi *indirecte* sunt nedeterminate doarece pot fi imaginate o infinitate de sisteme de forţe care să menţină un punct material într-o anumită poziţie dată.

Soluţii determinate pot exista numai atunci când forţele sistemului satisfac anumite condiţii privind numărul şi caracteristicile unora dintre ele, în aşa fel încât numărul necunoscutelor ce definesc sistemul căutat să nu depăşească trei în spaţiu şi două în plan.

c. *Având* o parte a parametrilor poziţiei de echilibru a punctului material şi o parte din caracteristicile forţelor care îi solicită, se cer celelalte caracteristici ce definesc sistemul de forţe şi poziţia de echilibru studiată.

Astfel de probleme au un caracter *mixt* şi îşi găsesc soluţii unice, bine detrminate numai atunci când numărul necunoscutelor introduse în sistemele de ecuaţii (2.10) sau (2.11) nu depăşesc numărul de 3 în spaţiu şi de 2 în plan.

Problemele de echilibru ale punctului material liber în care numărul necunoscutelor scalare depăşeşte pe cel al ecuaţiilor de echilibru se numesc *static nedeterminate*.

4.2 ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

Corpuri reale modelate prin puncte materiale libere se întâlnesc rar, în special în domeniul Mecanicii cereşti şi a Fizicii atomice. În tehnica construcţiilor, conceptul de *punct material* este unul ipotetic, ce modelează *corpurile cu dimensiuni mici sau foarte mici* în raport cu alte corpuri înconjurătoare. De regulă, ele sunt supuse unor restricţii geometrice de a rămâne fixe într-un punct din spaţiu, pe o suprafaţă, pe o curbă sau pe o dreaptă.

Sunt astfel suprimate unul sau mai multe din gradele de libertate pe care punctele materiale le-ar avea ca puncte materiale libere.

Un astfel de corp obligat la restricţiile menţionate, poartă denumirea de punct material *supus la legături* sau punct material *legat*.

O legătură care suprimă un singur grad de libertate se numeşte *simplă*; dacă aceasta suprimă două sau mai multe grade de libertate, ea se numeşte *complexă*.

Legăturile care obligă punctul material să nu părăsească suprafaţa (curba sau dreapta) într-un singur sens, poartă denumirea de *legături unilaterale*; dacă însă restricţia se extinde la orice sens, legătura se zice *bilaterală*.

Practic, legăturile aplicate punctelor materiale pot fi realizate în două moduri:

a) *prin fire şi bare* (fig. 4.1)

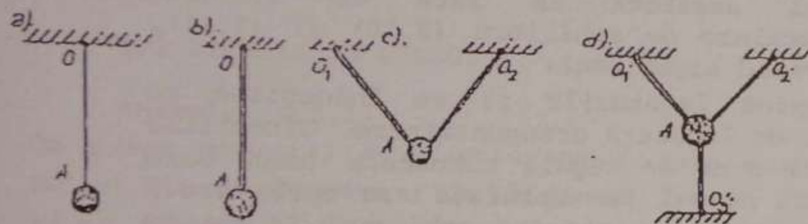


Fig. 4.1

În figura 4.1,a, punctul material este legat prin firul OA care îl obligă să rămână pe suprafaţa sau în interiorul sferei de rază OA şi centru O; legătura este unilaterală. Legătura din figura 4.1, b este realizată printr-o bară care obligă punctul să rămână pe suprafaţa sferei de rază OA şi centru O. Legând punctul cu două bare (fig. 4.1,c) acesta este obligat să rămână tot timpul pe cercul de intersecţie a sferelor de raze O_1A_1 şi O_2A_2, cu centrele în O_1 şi O_2. Dacă punctului A i se aplică 3 legături prin bare necoplanare (fig. 4.1,d) acesta va ocupa o poziţie fixă în spaţiu.

b) *prin restricţia* de a rămâne în permanenţă pe o suprafaţă lucie (plană sau curbă) sau pe o linie (dreaptă sau curbă) - fig. 4.2.

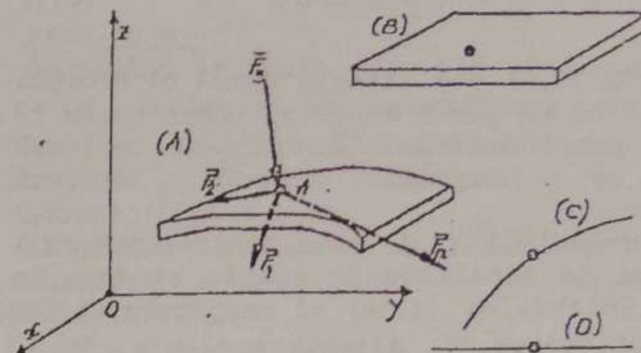


Fig. 4.2

În baza axiomei legăturilor, orice legătură aplicată punctului material este echivalentă cu o *forţă de legătură* (denumită şi *reacţiune*) având acelaşi efect mecanic ca şi restricţie geometrică respectivă.

Cum legăturile suprimă grade de libertate, forţele de legătură (echivalente mecanic cu aceste legături) vor apare totdeauna pe direcţia deplasărilor împiedicate (a gradelor de libertate suprimate).

În consecinţă, pentru legăturile prin fire şi bare (fig. 4.1), reacţiunile vor apare pe direcţia acestora, iar în cazul celor materializate prin suprafeţe, curbe sau drepte (fig. 4.2), prin perpendiculare pe acestea.

Suprimând legăturile aplicate punctului material şi înlocuindu-le cu forţele de legătură corespunzătoare $(\bar{L}_j)$ asupra acestuia vor acţiona forţele efectiv aplicate $\bar{F}_i$ şi forţele de legătură $\bar{L}_i$, formând un sistem de forţe concurente.

Condiţia de echilibru a punctului material revine deci la echilibrul sistemului de forţe concurente $(\bar{F}_i, \bar{L}_j)$ care se exprimă prin ecuaţia vectorială:

$$\bar{R} = \sum_{1}^{i} \bar{F}_i + \sum_{1}^{j} \bar{L}_j = 0 \qquad (4.1)$$

Cum ecuaţia (4.1) are aceeaşi formă cu ecuaţia (1.13), rezultă că un punct material legat poate fi studiat ca un punct material liber, dacă în locul legăturilor se introduc forţele legătură corespunzătoare.

Ecuaţia vectorială (4.1) este echivalentă cu 3 ecuaţii scalare de echilibru în spaţiu şi două în plan de tipul relaţiilor (2.10) şi respectiv (2.11) aplicate atât forţelor $\bar{F}_i$, efectiv aplicate cât şi celor de legătură $\bar{L}_j$.

Pentru exemplificare, vom considera un punct material A legat prin două fire OA şi OB, aflat în echilibru sub acţiunea forţei verticale F (fig. 4.3,a).

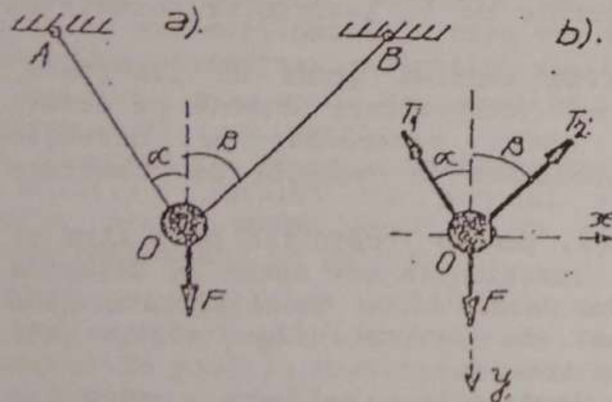


Fig. 4.3

Suprimând legăturile (firele) şi introducând pe direcţiile lor forţele T_1 şi T_2 (fig. 4.3,b) acestea împreună cu forţa F menţin punctul material m în poziţia de echilibru dată (fig. 4.3.a).

Forţele F, T_1 şi T_2 formează un sistem de forţe concurente în echilibru, în consecinţă ele vor satisface ecuaţiile (2.11). Alegând un sistem de referinţă ca în figura 4.3,b, acestea vor avea expresiile:

$$R_x = -T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = 0,$$
$$R_y = -T_1\cos\alpha - T_2\cos\beta + F = 0.$$

O problemă importantă, în legătură cu echilibrul punctului material legat este determinarea forţelor de legătură (a reacţiunilor) ce apar în legături.

Calculul acestora se face cu ajutorul ecuaţiilor scalare de echilibru (2.10) şi (2.11), după caz, urmând algoritmul:

- se suprimă legăturile şi se înlocuiesc cu forţele de legătură orespunzătoare. Direcţiile acestora sunt de regulă cunoscute (după bară sau fir, normal la suprafaţă sau curbă etc.) iar sensurile se introduc arbitrar. Se obţine astfel un sistem de forţe concurente compus din forţele date (cunoscute) şi forţele de legătură (necunoscute);
- se exprimă echilibrul sistemului sus-menţionat cu ajutorul ecuaţiilor (2.10) sau (2.11) şi se obţine un sistem de ecuaţii algebrice liniare având ca necunoscute forţele de legătură;
- se rezolvă sistemul de ecuaţii şi se interpretează rezultatele.

Dacă din calcul o reacţiune rezultă cu semnul plus, acesta indică faptul că sensul real al reacţiunii este cel arbitrar ales. Valorile cu semn minus indică sens real invers celui arbitrar atribuit reacţiunii respective.

Soluţii unice bine determinate se obţin numai atunci când numărul legăturilor nu depăşeşte 3 în spaţiu şi două în plan.

Dacă numărul acestora este mai mare, problema respectivă este static nedeterminată.

Ecuațiile (2.10) și (2.11) sunt utilizate și în cazul problemelor mixte de punct material legat, în care intervin atât forțe de legătură sau efectiv aplicate cât și parametri ce definesc poziția de echilibru. Și în acest caz, soluții unice în lipsa altor condiții suplimentare se obțin numai atunci când numărul necunoscutelor nu depășește 3 în spațiu și 2 în plan.

4.3 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 4.3.1

Un punct material M de greutate $\bar{G}$ este suspendat cu un fir de lungime ℓ de un punct fix O. El este ținut în repaus la distanța x de peretele vertical cu o forță $\bar{F}$ proporțională cu distanța de la perete la punct, factorul de proporționalitate fiind k (fig. 4.4,a). Se cere să se determine unghiul α și tensiunea T din fir pentru poziția de echilibru a punctului.

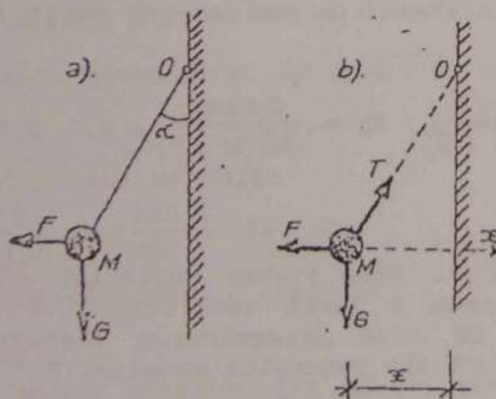


Fig. 4.4

Rezolvare

Suprimând legătura prin fir și înlocuind-o cu forța de legătură corespunzătoare $\bar{T}$, punctul material se va găsi în echilibru sub acțiunea forțelor $\bar{G}$ și $\bar{F} = k\bar{x}$ cunoscute și a forței $\bar{T}$ necunoscute (fig. 4.4,b)

Alegând un sistem de referință xMy, condiția de echilibru a punctului se va exprima prin ecuațiile (2.11).

Vom avea: $R_x = T\cos(90-\alpha) - F = 0$; $R_y = -T\cos\alpha + G = 0$, care se mai scriu

$$T\sin\alpha = F = kx \qquad (a)$$

$$T\cos\alpha = G \qquad (b)$$

Făcând raportul relațiilor (a) și (b) se obține

$$\frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{kx}{G} \text{ sau } \operatorname{tg}\alpha = \frac{kx}{G} \qquad (c)$$

Se disting două cazuri:

1) $\alpha = 0$ ($x = 0$; $\bar{F} = 0$), pentru care din ecuația (b) se obține $T = G$.

2) $\alpha \neq 0$; ($x = \ell\sin\alpha$; $F = kx = k\cdot\ell\sin\alpha$).

Înlocuind în ecuația (c) se obține $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k\ell\sin\alpha}{G}$

din care: $\cos\alpha = \frac{G}{k\ell}$, cu care din ecuația (b) rezultă:

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{G}{G/k\ell} = k\ell$$

Exemplul 4.3.2

Un disc de greutate $\bar{G}$ se reazemă pe un perete luciu AB fiind suspendat cu un fir legat în punctul A. Firul face cu peretele unghiul α. Se cere să se determine tensiunea din fir și reacțiunea peretelui (fig. 4.5,a).

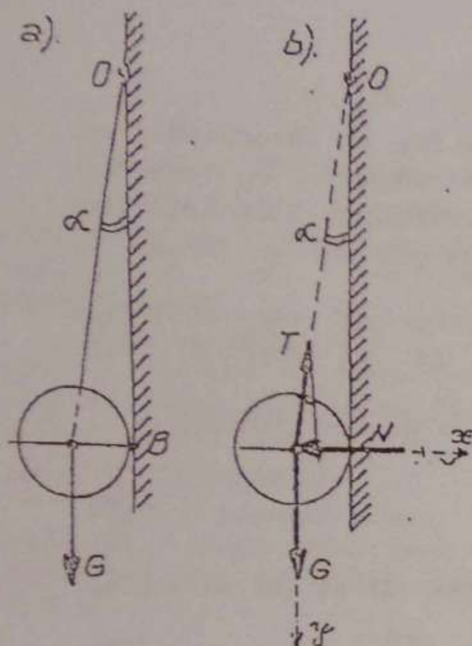


Fig. 4.5

Rezolvare

Se înlocuieşte legătura prin fir cu forţa de legătură T şi rezemarea din B cu forţa N (fig. 4.5,b). Exprimând echilibrul discului prin ecuaţiile (2.11), scrise în raport cu sistemul de axe xMy se obţine

$R_x = -N + T\sin\alpha = 0$ (a)

$R_z = -T\cos\alpha + G = 0$ (b)

Din ecuaţia (b) $T = \dfrac{G}{\cos\alpha}$, iar din ecuaţia (a) se calculează:

$$N = t\sin\alpha = \frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha = G \cdot tg\alpha .$$

Exemplul 4.3.3

Un inel O de greutate $\bar{G}$ este petrecut printr-un fir flexibil ancorat la capete de doi pereţi (fig. 4.6,a). Inelul ocupă poziţia de echilibru dată de unghiurile α şi β. Se cer tensiunile din fire în poziţia de echilibru a inelului.

Rezolvare

Suprimând firele (legăturile inelului) şi înlocuindu-le cu forţele de legătură $\bar{T}_A$ şi $\bar{T}_B$, se obţine sistemul de forţe în echilibru arătat în figura 4.6,b.

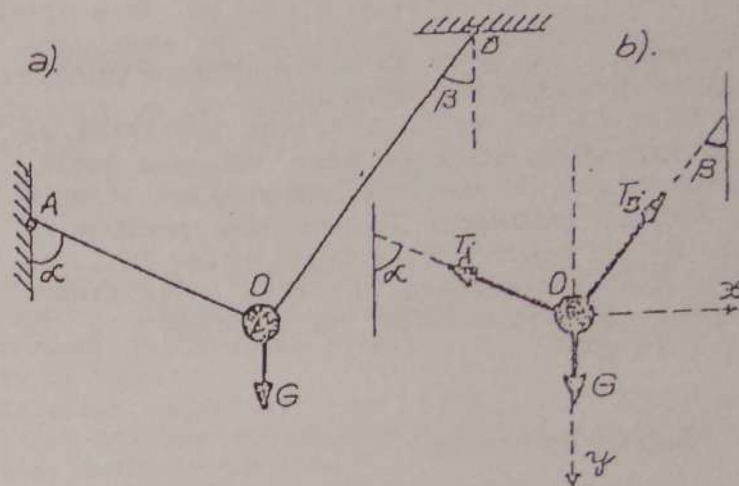


Fig. 4.6

Alegând sistemul de referinţă xOy, ecuaţiile scalare de echilibru (2.11) se vor scrie în forma

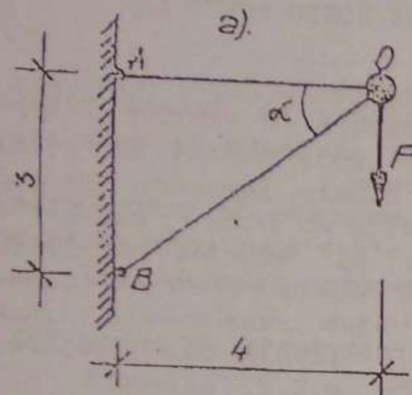
$$R_x = -T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = 0$$
$$R_y = -T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta + G = 0$$

Rezolvând sistemul de mai sus se obţin forţele căutate

$$T_A = \frac{G\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad T_B = \frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Exemplul 4.3.4

În nodul O al unui sistem articulat din două bare este aplicată o forţă verticală P = 120 kN (fig. 4.7,a). Se cere determinarea forţelor din barele de legătură ale punctului material O.



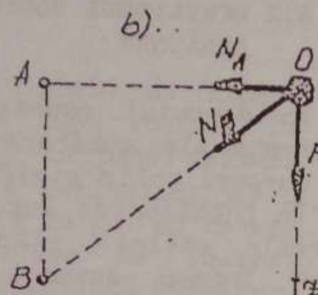


Fig. 4.7

Rezolvare

Nodul O se modelează printr-un punct material supus acţiunii sistemului de forţe în echilibru P, N_A şi N_B (fig. 4.7,b). Deoarece nu cunoaştem sensurile forţelor de legătură (N_A şi N_B) acestea s-au introdus arbitrar.

Exprimând condiţia de echilibru a celor 3 forţe din figura (4.7,b), prin două ecuaţii de proiecţie după axele Ox şi Oz se obţin:

$$R_x = -N_A - N_B\cos\alpha = 0 \qquad (a)$$

$$R_z = N_B\sin\alpha + P = 0 \qquad (b)$$

Din considerente geometrice, $OB = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0,8$; $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0,6$. Cu acestea, din relaţiile (a) şi (b) se obţin

$$N_B = -\frac{P}{\sin\alpha} = -\frac{120}{0,6} = -200 \text{ kN};$$

$$N_A = -N_B\cos\alpha = -(-200)\times 0,8 = +160 \text{ kN}.$$

Observaţie

Semnul minus rezultat din calcul pentru forţa N_B indică faptul că sensul ei real este invers celui arbitrar ales (fig. 4.7,c).

CAPITOLUL 5

STATICA CORPULUI SOLID RIGID ŞI A SISTEMELOR DE CORPURI

5.1 ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID LIBER

Un corp material se consideră *în spaţiu* dacă forţele sau sistemele de forţe ce-i sunt aplicate sunt oarecare şi *în plan*, dacă acestea sunt coplanare.

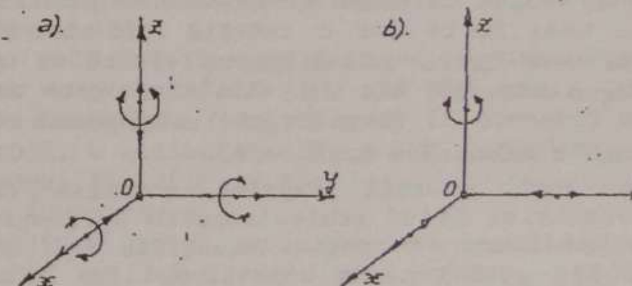


Fig. 5.1

Prin *solid rigid liber* se înţelege un corp indeformabil ce poate ocupa orice poziţie în spaţiu sau plan. Această libertate conferă corpului posibilitatea de a efectua *translaţii* şi *rotiri*. Oricare ar fi direcţiile acestora în spaţiu în raport cu un sistem cartezian de referinţă fiecare din ele va prezenta câte 3 componente reprezentate prin proiecţiile lor pe axele Ox, Oy şi Oz. Translaţiile şi rotirile susmenţionate reprezintă

gradele de libertate ale solidului rigid în spațiu față de sistemul de referință Oxyz (fig. 5.1,a).

Dacă solidul rigid este liber să ocupe orice poziție într-un plan, spre exemplu în planul xOy, el va putea efectua translații și rotiri în planul considerat.

Oricare ar fi direcțiile acestora, proiecțiile lor pe axele sistemului de referință vor prezenta două componente de tip translații, în lungul axelor Ox și Oy și o componentă de tip rotație în jurul axei Oz (fig. 5.1,b).

Cele două translații și rotația menționată reprezintă gradele de libertate ale solidului rigid în plan.

În consecință, un solid rigid liber, față de sistemul cartezian de referință prezintă 6 grade de libertate în spațiu și 3 grade de libertate în plan.

Având în vedere că orice translație se produce sub efectul unei forțe iar o rotație sub efectul unui moment, condiția necesară și suficientă ca un solid rigid liber să fie în echilibru este ca torsorul de reducere al forțelor ce-l acționează să aibă elementele nule: $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 = 0$.

Aceste două ecuații exprimă condiția de echilibru vectorial fiind echivalente cu 6 ecuații scalare de echilibru în spațiu (ecuațiile 2.9) și trei ecuații scalare de echilibru în plan (ecuațiile 2.20).

Problemele staticii solidului rigid liber sunt aceleași cu cele ale punctului material liber și se rezolvă după același algoritm folosind însă ecuațiile (2.9) și (2.20).

Soluții bine determinate se obțin numai atunci când numărul necunoscutelor (parametri ai poziției de echilibru sau forțe) este egal cu cel al ecuațiilor de echilibru, respectiv 6 în spațiu și 3 în plan.

5.2 ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

În domeniul construcțiilor, nu există părți componente ale acestora care să poată fi modelate prin corpuri solid rigid libere.

În totalitatea lor, elementele de construcție (grinzile, stâlpii, plăcile etc.) sunt constrânse a rămâne într-o anumită poziție prestabilită de echilibru în spațiu sau plan.

Corpurile obligate la restricții de acest fel se numesc *supuse la legături*.

O legătură suprimă solidului unul sau mai multe din gradele de libertate pe care acesta le avea ca solid rigid liber.

Ele realizează contactul dintre corpul supus la legături și un alt corp numit reazem sau corp de reazem.

Specifice staticii corpului rigid și sistemelor de corpuri sunt următoarele legături:

a. *Reazemul simplu*

Această legătură împiedică deplasarea corpului pe direcția normală suprafeței de reazem lăsând libere translațiile în planul acesteia și rotirile în jurul punctului de reazem (de contact dintre corp și reazem).

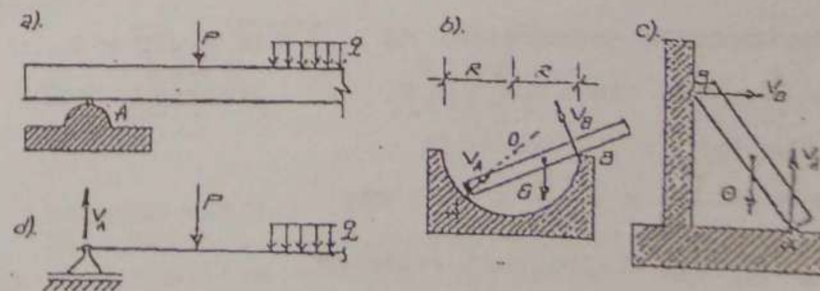


Fig. 5.2

Legătura suprimă solidului rigid un singur grad de libertate - deplasarea după normala la suprafaţa de reazem (fig. 5.2). În baza axiomei legăturilor reazemul simplu este echivalent cu o forţă V având punctul de aplicaţie în cel de reazem şi direcţia normală la suprafaţa de reazem. Schematic, un reazem simplu se reprezintă printr-un triunghi alunecător după direcţia deplasării (translaţiei) libere (fig. 5.2,d).

În figurile 5.2,a, 5.2,b şi 5.2,c sunt prezentate câteva tipuri de suprafeţe de reazem şi direcţiile reacţiunilor (V_A, V_2) ce iau naştere în punctele de reazem.

b. *Articulaţia*

Acest tip de legătură împiedică translaţia după orice direcţie lăsându-i libere corpului numai rotirile în jurul punctului de articulaţie.

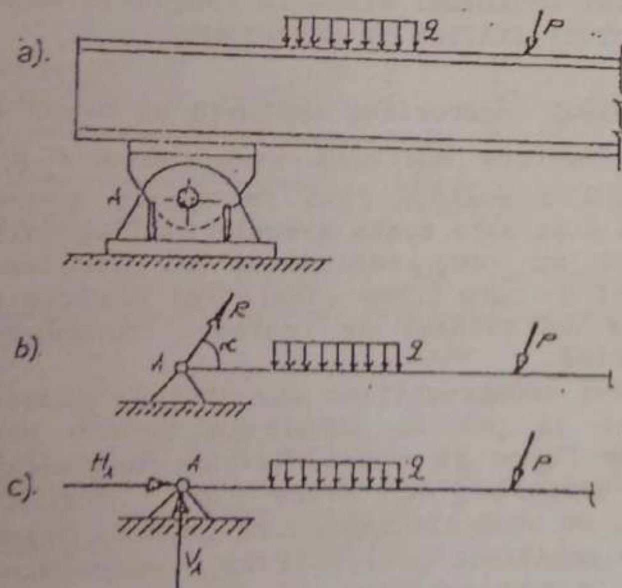


Fig 5.3

Dacă aceste rotiri se pot produce oricum în spaţiu, articulaţia se numeşte *sferică* sau *spaţială*.

Există şi un alt tip de articulaţie care permite corpului rotiri numai în jurul unei singure axe (funcţionând ca balamalele uşilor, ferestrelor etc.). O astfel de articulaţie se numeşte *cilindrică* sau *plană* şi este specifică corpului acţionat de forţe coplanare.

Într-adevăr, fixându-i un punct în planul forţelor, un astfel de corp nu va putea efectua translaţii dar se vor roti în jurul unei axe normale planului considerat.

Mecanic, articulaţia cilindrică este echivalentă cu o forţă de legătură ce trece prin punctul de articulaţie de modul R şi direcţie α necunoscute (fig. 5.3,b).

În calculele practice în locul acestora se folosesc componentele H şi V ale forţei R după două direcţii ortogonale (fig. 5.3,c).

Uzual, o articulaţie este schematizată printr-un triunghi fix (fig. 5.3,c).

c. *Încastrarea*

Legătura prin care punctele unei secţiuni aparţinând solidului rigid rămân legate fix de un corp de reazem poartă denumirea de *încastrare*.

Prin aceasta solidul rigid şi corpul de reazem pot fi considerate ca părţi ale aceluiaşi corp, prin urmare încastrarea poate fi considerată ca o legătură de continuizare. O încastrare împiedică orice deplasare a solidului rigid suprimându-i astfel toate cele 6 grade de libertate pe care le avea ca şi corp liber în spaţiu.

Dacă corpul este acţionat de un sistem de forţe coplanare, încastrarea îl fixează în planul acestora, suprimându-i toate cele 3 grade de libertate pe care le avea ca rigid liber în plan (fig. 5.4,a).

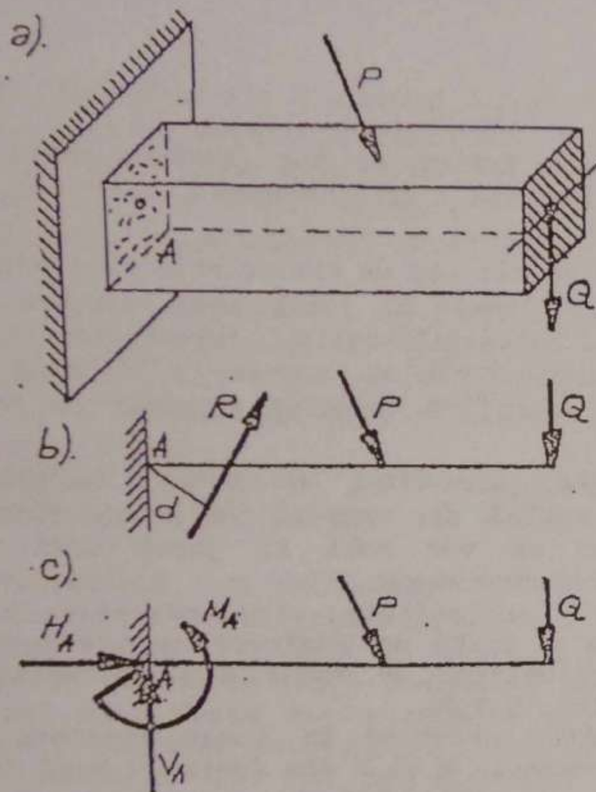


Fig. 5.4

În acest caz, încastrarea este echivalentă mecanic cu o forță $\bar{R}$ ce nu trece prin punctul de încastrare A, de modul R, direcție α și poziție d necunoscute (fig. 5.4,b).

Uzual, aceste mărimi sunt înlocuite prin componentele torsorului de reducere a forței R în punctul de încastrare A, compuse din momentul $M_A = R \cdot d$, forța verticală $V_A = R \cdot \sin\alpha$ și componenta $H_A = R \cdot \cos\alpha$. Schematizarea unei încastrări se face ca în figurile 5.4,b și 5.4,c.

Echilibrul solidului rigid supus la legături se reduce la echilibrul solidului rigid liber (tratat în paragraful 5.1) dacă legăturile, în baza axiomei legăturilor, sunt înlocuite cu forțele de legătură corespunzătoare (L_j).

Procedând la această substituire, asupra solidului rigid vor acționa forțe efectiv aplicate $\bar{F}_i$ (i=1, 2,...,n) și forțe de legătură $\bar{L}_j$ (j=1, 2, ..., k).

Pentru ca solidul rigid să fie în echilibru sistemul acestuia trebuie să aibă elementele torsorului de reducere nule:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i + \sum \bar{L}_j = 0$$
$$M_0 = \sum M_0(F_i) + \sum M_0(F_j) = 0 \qquad (5.1)$$

Dacă forțele $\bar{F}_i$ și $\bar{L}_j$ sunt raportate într-un sistem cartezian Oxyz, echilibrul corpului se exprimă prin 6 ecuații scalare în spațiu (ec. 2.9) și prin 3 ecuații scalare de echilibru în plan (ec. 2.20) rezultate din proiecția relațiilor (5.1) pe axele Ox, Oy și Oz.

5.3 FIXAREA SOLIDULUI RIGID ÎN SPAȚIU ȘI PLAN. STRUCTURI STATICE ȘI MECANISME

Fie ℓ numărul legăturilor aplicate și m cel al gradelor de libertate ale unui corp. Dacă $\ell \geq m$ acesta va ocupa o poziție fixă în spațiu sau în plan, fiindu-i suprimate toate gradele de libertate.

Un astfel de corp împiedicat să efectueze orice deplasări de corp liber și a cărui poziție de echilibru este determinată de legături formează o *structură statică*.

În domeniul construcțiilor structurile statice sunt numeroase și pot fi întâlnite într-o mare diversitate de forme și modalități de realizare. Stâlpii și grinzile de orice fel, pereții, planșeele etc. nu sunt altceva decât corpuri fixate în poziții de echilibru prestabilite, independente de forțele ce le sunt aplicate.

În raport de caracterul forțelor ce le sunt aplicate (spațiale sau plane) corpurile pot forma structuri statice spațiale sau structuri statice plane.

Așa cum s-a văzut mai sus, un corp liber are în plan 3 grade de libertate. Pentru fixarea acestuia și realizarea unei structuri statice plane vor fi necesare deci un număr minim de 3 legături.

Dispunerea acestora se poate realiza în 3 moduri:

a. *Printr-o încastrare* (fig. 5.5,a).

Structura statică obținută în acest mod poartă denumirea de *consolă*.

b. *Printr-o articulație și un reazem simplu* (fig. 5.5.b). Legătura realizată în acest fel se numește *simplă rezemare*. Avem astfel corpuri simplu rezemate, grinzi sau bare simplu rezemate etc. (fig. 5.5,b).

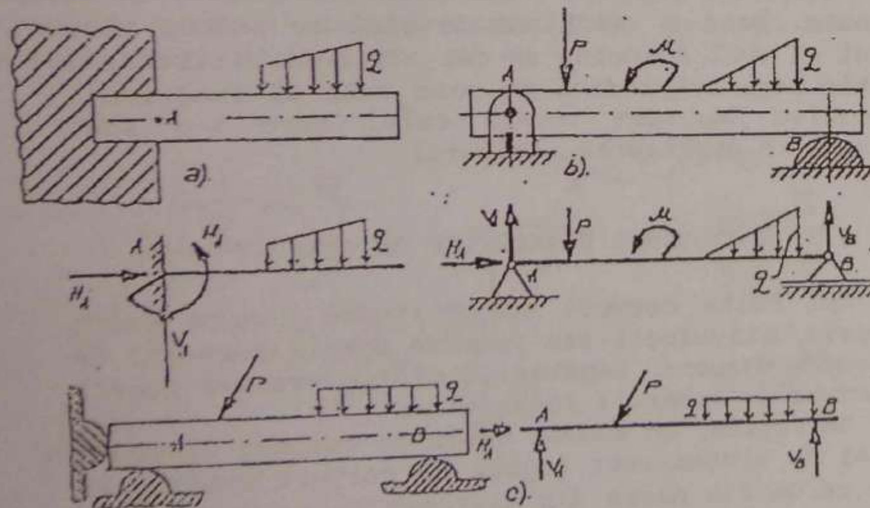


Fig. 5.5

c. *Prin trei reazeme simple în 3 puncte* diferite ale corpului dispuse astfel încât forțele de legătură ce le corespund să nu aibă suporturile paralele sau concurente într-un punct.

Structura statică obținută se numește tot simplu rezemată.

În figura 5.5 sunt prezentate modurile de fixare ale solidului rigid în plan cu 3 legături și schematizarea acestora în structuri statice și forțele de legătură aferente fiecărei legături.

Fixarea unui corp în plan poate fi însă realizată și cu un număr de legături mai mare. În acest scop pot fi utilizate:

- două încastrări (fig. 5.6,a).
- încastrare și o articulație (fig. 5.6,b).
- o încastrare și un reazem simplu (de tipul celui indicat în fig. 5.6,b).
- două articulații (de tipul celei indicate în fig. 5.6,b).

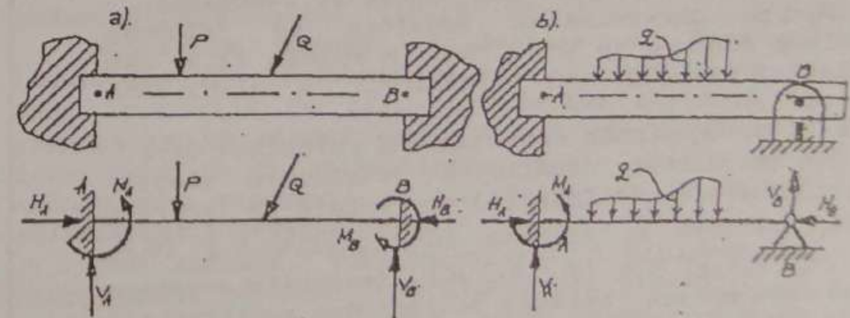


Fig. 5.6

În figura 5.6 sunt prezentate două dintre aceste cazuri, schematizările acestora și exteriorizările forțelor de legătură din acestea.

Structurile statice având numărul forțelor de legătură n mai mare de 6 în spațiu și 3 în plan poartă denumirea de *static nedeterminate*.

Diferența n-6 în spațiu și n-3 în plan poartă denumirea de *grad de nedeterminare statică*. Referindu-ne la cazurile plane din figura 5.6, gradul de nedeterminare al acestora este respectiv 6-3=3, 5-3=2.

În cazul structurilor din figura 5.5, numărul forțelor de legătură n este egal cu cel al ecuațiilor scalare de echilibru în plan (2.20), respectiv de n=3. Structurile de acest tip se numesc *static determinate*.

Dacă numărul legăturilor aplicate solidului rigid este mai mic de 6 în spațiu și 3 în plan acesta formează un *mecanism*.

Un astfel de corp, sub acțiunea forțelor ce-i sunt aplicate suferă deplasări de corp liber, în consecință nu poate forma o structură statică.

5.4 DETERMINAREA FORȚELOR DE LEGĂTURĂ

Forțele ce iau naștere în legăturile (reazemele) unui corp se mai numesc și *reacțiuni*.

Pentru determinarea acestora se folosesc ecuațiile scalare de echilibru în spațiu (2.9) sau în plan (2.20) după caz. Algoritmul de calcul este următorul:

1. Se alege un sistem cartezian de referință Oxyz.
2. Se înlocuiesc legăturile (reazemele simple, articulațiile, încastrările) cu forțele de legătură corespunzătoare $\bar{L}_j$ arătate în figurile 5.2 (V_A), 5.3 (V_A, H_A) și 5.4 (V_A, H_A, M_A). Sensurile acestora fiind necunoscute, acestea se introduc arbitrar.
3. Se exprimă echilibrul sistemului de forțe compus din încărcările exterioare F_i și forțele de legătură exteriorizate L_j cu ajutorul ecuațiilor scalare de echilibru în spații (2.9) sau în plan

(2.20) după caz. Pe lângă ecuațiile (2.20) echilibrul forțelor coplanare poate fi exprimat și prin alte două grupuri de câte 3 ecuații scalare care conțin:

- o ecuație de proiecție nulă pe o axă (spre exemplu Ox) și două ecuații de momente nule în raport cu două puncte A și B din planul forțelor.

$$\sum F_{ix} = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0 \qquad (5.2)$$

- trei ecuații de momente nule în raport cu 3 puncte necoliniare din planul forțelor:

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0 \qquad (5.3)$$

În scrierea acestora semnul pozitiv pentru momentele forțelor F_i și L_j se alege arbitrar. Echilibrul corpului astfel exprimat conduce la un sistem de ecuații algebrice liniare având ca necunoscute forțele de legătură din reazeme.

4. Se rezolvă sistemul de ecuații obținut conform punctului 3 și se interpretează rezultatele obținute. Dacă o reacțiune rezultă cu semnul plus sensul ei real coincide cu cel atribuit arbitrar. O soluție negativă indică un sens real al reacțiunii respective de sens invers celui care i-a fost atribuit la suprimarea legăturii.

5.5. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI

Mai multe corpuri solid rigide legate între ele prin articulații sau reazeme simple formează un *sistem de corpuri*. Legăturile dintre acestea poartă denumirea de *legături interioare*.

De regulă, un anumit număr de corpuri dintr-un astfel de sistem sunt legate de corpuri exterioare fixe ce nu fac parte din sistemul de corpuri, prin

legături exterioare de tipul celor interioare (articulații, reazeme simple, încastrări).

Legăturilor interioare, în baza axiomei legăturilor le corespund *forțe de legătură interioare* ($\bar{L}_i$) iar legăturilor exterioare, *forțe de legătură exterioare* ($\bar{L}_e$).

Ca acțiuni reciproce între corpuri, forțele interioare $\bar{L}_i$ sunt formate din perechi egale și direct opuse, motiv pentru care, dacă sunt considerate pentru întregul sistem de corpuri ele formează sisteme de forțe echivalente cu zero (în echilibru).

Torsorul lor de reducere într-un punct arbitrar din spațiu va avea deci componentele:

$$\bar{R}(L_i) = 0; \bar{M}_0(L_i) = 0 \qquad (5.4)$$

Pentru exemplificare în figura 5.7,a s-a considerat un sistem format din 3 corpuri c_1, c_2 și c_3 legate de două corpuri fixe c_{01} și c_{02} care nu fac parte din sistem.

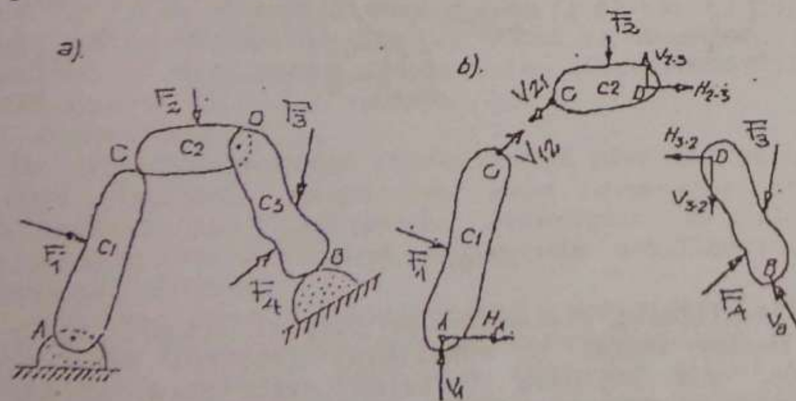


Fig. 5.7

Corpurile c_1 și c_2 sunt legate în C printr-un reazem simplu, căruia îi corespund forța de legătură interioară $\bar{V}_{12} = \bar{V}_{21}$, iar corpurile c_2 și c_3 sunt legate între ele printr-o circulație căreia îi corespund două forțe de legătură interioare, $V_{23} = V_{32}$ și $H_{23} = H_{32}$ (fig. 5.7.b).

Sistemul de corpuri se numește plan atunci când toate forțele ce acționează asupra acestuia sunt coplanare.

Deși numeroase, problemele staticii sistemelor de corpuri pot avea următoarele trei tipuri de necunoscute:

- Modulul, direcția și sensul reacțiunilor, a forțelor de legătură interioare dintre anumite corpuri sau dintre toate corpurile;
- Valorile parametrilor independenți (unghiuri, distanțe etc.) ce definesc poziția de echilibru a sistemului de corpuri.

Pentru determinarea acestora se utilizează:

a. *Metoda echilibrului întregului sistem-calculul reacțiunilor* (fig. 5, 8).

Având în vedere că forțele de legătură interioare (L_i) formează sisteme în echilibru se face abstracție de ele, considerând sistemul de corpuri ca un singur corp, ca și cum legăturile interioare ar fi solidificate, motiv pentru care metoda este cunoscută și sub denumirea de *metoda solidificării legăturilor*).

Cu această particularizare, determinarea reacțiunilor se face după algoritmul prezentat în aliniatul 5.4 pentru solidul rigid luînd în calcul numai forțele exterioare F_i și cele din legăturile exterioare L_e.

Pentru exemplificare în figura 5.8 este prezentat sistemul de corpuri (fig. 5.8.a) și *corpul* obținut din acesta prin solidificarea legăturilor interioare (fig. 5.8,b). Forțele de legătură căutate sunt V_A, H_A și V_B.

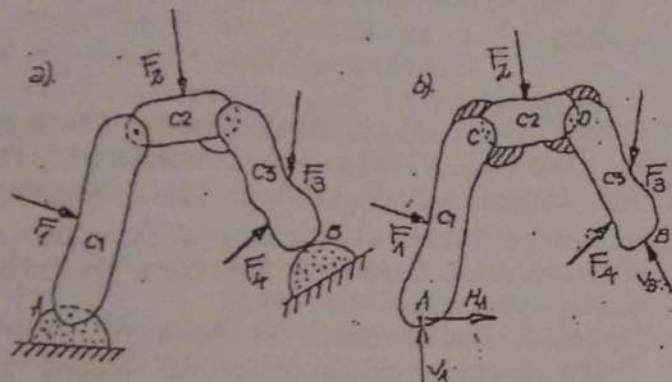


Fig. 5.8

b. *Metoda echilibrului părților*

Prin parte a unui sistem de corpuri se consideră un corp al acestuia izolat din sistem prin suprimarea și înlocuirea legăturilor avute cu corpurile învecinate sau un ansamblu de mai multe corpuri extrase din sistem în aceleași condiții. Metoda izolării corpurilor are la bază teorema echilibrului părților conform căreia orice parte izolată dintr-un sistem de corpuri în echilibru se află în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor ce-i sunt direct aplicate.

Pentru ilustrare vom considera sistemul de 5 corpuri din figura 5.9,a în echilibru sub acțiunea forțelor F_1, F_2, F_3, F_4 și a reacțiunilor din reazemele A și B. Divizând sistemul de corpuri în 3 părți, conform celor arătate mai sus, fiecare din acestea se va afla în echilibru sub acțiunea forțelor ce-i sunt direct aplicate (fig. 5.9,b). În baza metodei solidificării legăturilor corpurile 1 și 2 pot fi considerate ca formând un singur corp. La fel și corpurile 3 și 4 (fig. 5.9,b). Exprimând echilibrul acestora cu ajutorul ecuațiilor scalare de echilibru (2.9) sau (2.20) se obține sistemul de ecuații algebrice liniare având ca necunoscute forțele de legătură dintre părțile considerate.

Metoda de calcul este deosebit de avantajoasă atunci când se urmărește calculul reacțiunilor L_i numai dintre anumite corpuri ale sistemului.

c. *Metoda izolării corpurilor*

În unele probleme tehnice este necesară cunoașterea forțelor de legătură dintre toate corpurile sistemului. Metoda uzuală folosită pentru calculul acestora reprezintă o generalizare a metodei echilibrului părților și constă în divizarea sistemului de corpuri într-un număr de părți egal cu cel al corpurilor.

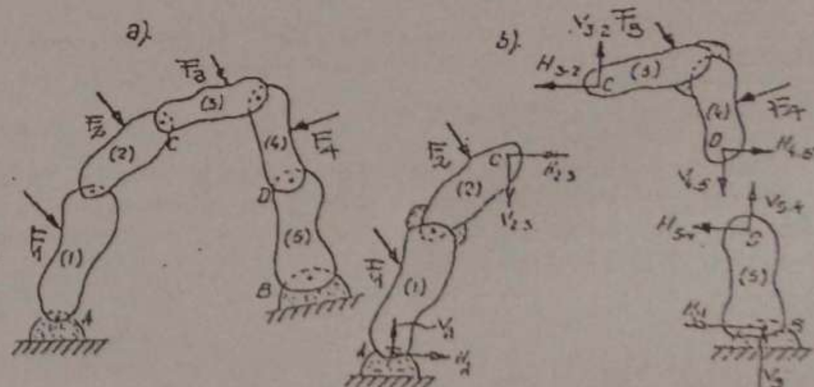


Fig. 5.9

Echilibrul sistemului de corpuri (fig. 5.10,a) se reduce astfel la echilibrul fiecărui corp în parte, sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură ce-i sunt aplicate direct (fig. 5.10,b).

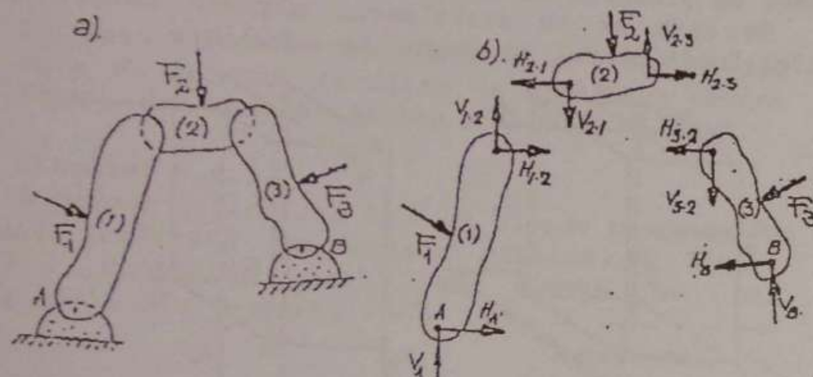


Fig. 5.10

Pentru exemplificare, în figura (5.10,a) s-a prezentat un sistem de 3 corpuri în echilibru articulate în A și B și simplu rezemate în C. Izolând corpurile, asupra fiecăruia vor acționa direct forțele exterioare și de legătură indicate în figura (5.10,b). Sub acțiunea acestora fiecare corp în parte se va afla în echilibru. Exprimând acest lucru cu ajutorul ecuațiilor (2.9) sau (2.20) se obține un sistem de ecuații având ca necunoscute reacțiunile din toate legăturile (interioare și exterioare).

Observații:

1. În aplicarea metodei echilibrului părților și a metodei izolării corpurilor este avantajos ca reacțiunile din legăturile exterioare să fie determinate în prealabil cu metoda echilibrului întregului sistem.
2. La suprimarea legăturilor exterioare și interioare forțele de legătură corespunzătoare se introduc cu sensuri arbitrare. Dacă din calcul o reacțiune rezultă pozitivă, sensul ei real coincide cu cel arbitrar ales. Soluțiile negative indică sensuri opuse celor arbitrar atribuite.
3. Dacă se notează cu C numărul corpurilor din sistem și cu ℓ_e și ℓ_i numărul echivalent de legături

simple corespunzătoare reazemelor exterioare și respectiv interioare și având în vedere că un solid rigid are 6 grade de libertate în spațiu și 3 în plan față de triedrul cartezian Oxyz, numărul gradelor de libertate a sistemului de corpuri va fi: $m = 6c - (\ell + \ell_i)$, în spațiu și $m = 3c - (\ell_e + \ell_i)$ în plan.

În raport de valorile parametrului m sistemele de corpuri pot forma:

- structuri static determinate dacă $m = 0$.
- structuri static nedeterminate dacă $m < 0$.

Diferența $(\ell_e + \ell_i) - m$ definește gradul de nedeterminare statică a sistemului de corpuri.

- mecanisme, dacă $m > 0$.

Un astfel de sistem nu poate forma o structură statică.

5.6 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 5.6.1

O bară de lungime 2ℓ și greutate P se reazemă fără frecare pe muchia și peretele unui canal (fig. 5.11.a). Se cer reacțiunile din reazemele barei și unghiul θ pentru poziția de echilibru.

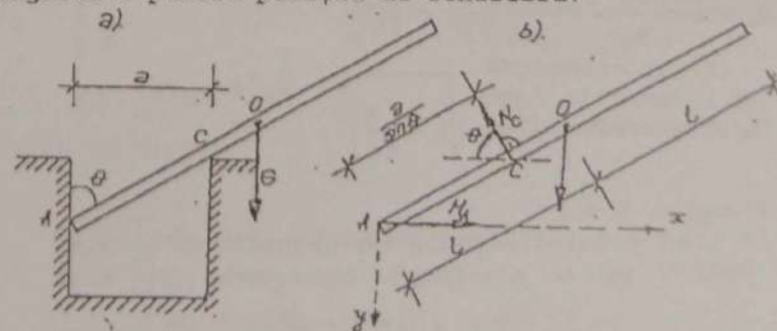


Fig. 5.11

Rezolvare

Bara AB este simplu rezemată în punctele A şi C. Înlocuind aceste legături prin forţele de legătură corespunzătoare, asupra ei vor acţiona forţele H_A, N_C şi P după schema din figura 5.11.b. Alegând sistemul de referinţă xOy ca în figură, şi având în vedere ecuaţiile (2.20) echilibrul barei se va exprima prin ecuaţiile:

$$R_x = H_A - N_C \cos\theta = 0 \qquad (a)$$

$$R_y = -N_C \sin\theta + G = 0 \qquad (b)$$

$$\sum M_A = N_C \cdot \frac{a}{\sin\theta} - G\ell \sin\theta = 0 \qquad (c)$$

Din ecuaţia (c) se obţine: $N_C = G\ell \dfrac{\sin^2\theta}{a}$, care introdusă în ecuaţia (b) rezultă: $-\dfrac{G\ell}{a}\sin^3\theta + G = 0$, de unde $\sin\theta = \sqrt[3]{\dfrac{a}{\ell}}$.

Pentru ca echilibrul să fie posibil, este necesar ca $\sin\theta \le 1{,}00$, ceea ce conduce la condiţia $a<\ell$ satisfăcută dacă centrul de greutate al barei se află în dreapta punctului de rezemare C.

Cu valoarea $\sin\theta$ determinată mai sus, pentru reacţiunile N_C şi H_A se obţin expresiile

$$N_C = \frac{G\ell \sin^3\theta}{a} = \frac{G\ell}{a}\sqrt{\frac{a^2}{\ell^2}} = G\sqrt[3]{\frac{\ell}{a}}$$

$$H_A = N_C \cos\theta = G\sqrt[3]{\frac{\ell}{a}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Exemplul 5.6.2

Un bloc paralelipipedic de greutate G = 600kN este aşezat pe o platformă orizontală şi este solicitat de o forţă orizontală H acţionând în planul de simetrie al blocului (fig. 5.12).

Se cere să se stabilească mărimea forţei H astfel încât blocul să rămână în echilibru.

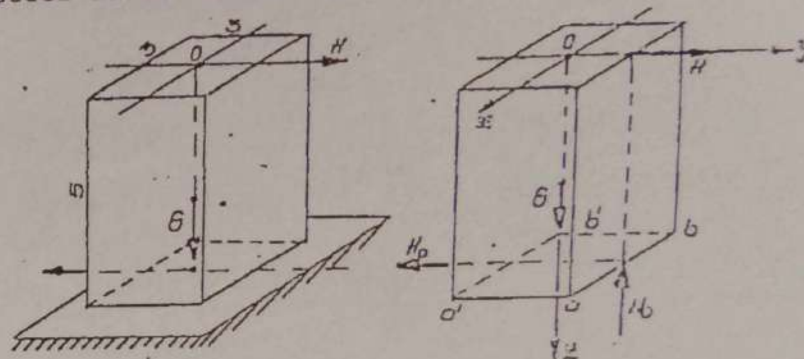


Fig. 5.12

Rezolvare:

Blocul este fixat pe platformă prin simplă rezemare, în secţiunea de reazem luând naştere forţa de frecare $H_0 = \mu \cdot G$, paralelă cu H şi de sens opus acesteia întrucât ea se opune translaţiei blocului pe direcţia şi în sensul forţei H.

Pentru toate valorile $H \le H_0 = \mu \cdot G$ translaţiile menţionate sunt împiedicate.

Corpul se poate însă roti în jurul muchiei a-b sub efectul momentului de rostogolire M_r dat de cuplul de forţe (H, H_0), caz în care rezemarea blocului pe platformă se va limita la muchia menţionată şi va fi echivalentă cu forţa N_C aplicată în punctul C (fig. 5.12,b).

Forţele G şi N_0 = G acţionând ca în figura 5.12,b formează la rândul lor un cuplu al cărui moment M_s, numit *moment de stabilitate* se opune momentului de răsturnare M_r.

Corpul nu se va rostogoli, deci se va afla în echilibru, atâta timp cât $M_s \ge M_r$.

Pe baza datelor problemei M_s = 1,5xG = 900 kNm, M_r = 5H cu care condiţia de echilibru devine 5H ≤ 900kN, din care se obţine H ≤ 900/5 = 180kN.

Exemplul 5.6.3

O grindă articulată în A şi simplu rezemată în B este încărcată cu forţele arătate în figura (5.13). Cunoscând α=15° şi P=50kN se cer reacţiunile din reazeme.

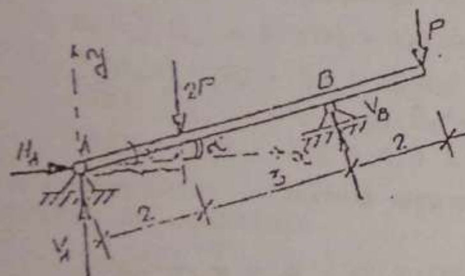


Fig. 5.13

Rezolvare:

Se alege sistemul de referinţă xOy ca în figură şi se înlocuiesc reazemele cu forţele de legătură V_A, H_A şi V_B.

Exprimând echilibrul sistemului de forţe ce acţionează grinda prin ecuaţiile (5.2) se obţine:

$R_x = \sum F_{ix} = H_A - N_B \sin\alpha = 0$ (a)

$\sum M_A = 2P \times 2\cos\alpha - 5N_B + 7P\cos\alpha = 0$ (b)

$\sum M_B = 5V_A\cos\alpha - 2P\times3\cos\alpha + 2P\times\cos\alpha - H_A 5\sin\alpha = 0$ (c)

Din ecuaţia (b) rezultă $N_B = \frac{11P}{5}\cos\alpha = 106{,}252\text{kN}$

care înlocuit în ecuaţia (a) se obţine:

$H_A = 106{,}252 \times \sin 15° = 27{,}50$ kN.

Cu H_A determinat, din ecuaţia (c) se calculează:

$V_A = \frac{1}{5\cos\alpha}(4P\cos\alpha + 5H_A\sin\alpha) = 0{,}8P + H_A \mathrm{tg}\alpha = 47{,}369\text{kN}$

Pentru verificarea calculului se verifică echilibrul sistemului de forţe pe verticală:

$-(V_A + N_B\cos\alpha) + 2P + P = 0$

$-(47{,}369 + 106{,}252 \times \cos 15°) + 3 \times 150 = 0$

$-150 + 150 = 0$

Exemplul 5.6.4

O consolă este alcătuită şi încărcată cu sistemul de forţe indicat în figura 5.14,a. Se cer reacţiunile ce apar în secţiunea ei de încastrare.

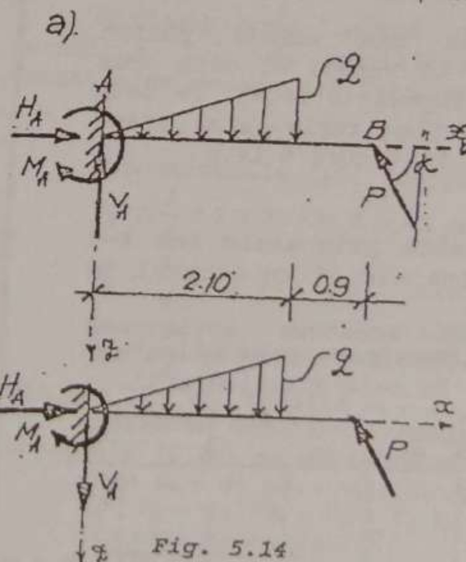


Fig. 5.14

Rezolvare:

Se înlocuieşte încastrarea cu forţele de legătură corespunzătoare şi se alege sistemul de referinţă xOz ca în figură.

Forţa continuă q se înlocuieşte cu o forţă concentrată $Q = \frac{2{,}1 \times 20}{2} = 21\text{kN}$ trecând prin centrul forţelor paralele continue (fig. 5.14,a).

Exprimând echilibrul sistemului de forţe cu relaţiile (2.20) se obţine:

$R_x = \sum F_{ix} = H_A - P\cos 60° = 0,$

$R_z = \sum F_{iz} = -V_A + Q - P\sin\alpha = 0,$

$\sum M_A = \mathcal{M}_A + 1{,}40Q - 3P\sin\alpha = 0,$

din care se obţin

$$H_A = P\cos 60^\circ = 75\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 37,5\sqrt{3}\ \text{kN},$$

$$V_A = Q - P\sin\alpha = 21 - 75\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -91,50\ \text{kN},$$

$$\mathcal{M}_A = 3P\sin\alpha - 1,4Q = 308,10\ \text{kNm}.$$

Pentru verificare, se poate utiliza o ecuație de moment nul în raport cu punctul B.

$$3V_A + \mathcal{M}_A - 1,6Q = 0,$$

$$3(-91,5) + 303,9 - 1,6\times 21 = 0,$$

$$-308,10 + 308,10 = 0.$$

Semnul minus rezultat din calcul pentru reacțiunea V_A indică faptul că sensul ei este opus celui arbitrar introdus în figura (5.14.a). Pe baza valorilor obținute, sensurile reale ale reacțiunilor sunt cele indicate în figura 5.14.b.

Exemplul 5.5.5

Două corpuri schematizate prin axele lor A-B și B-C sunt articulate între ele și cu terenul în punctele A și C.

Cunoscând că asupra acestora acționează forțele P = 50kN și Q = 90kN (fig. 5.15.a) se cer reacțiunile ce iau naștere în cele 3 articulații.

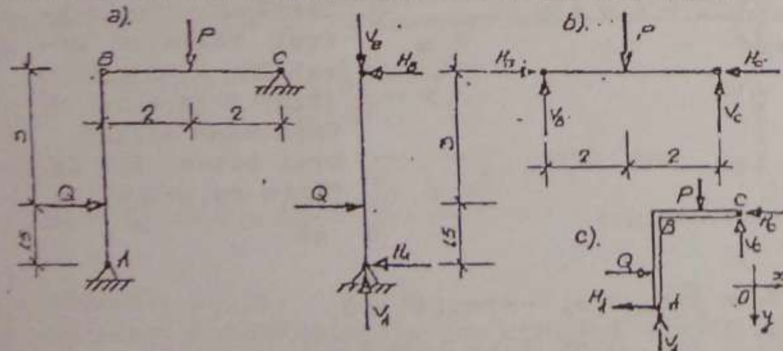


Fig. 5.15

Rezolvare:

Barele AB și BC formează un sistem de două corpuri legate între ele articulat (legătură interioară) și tot articulat cu terenul, în punctele B și C (legături exterioare). Aplicând metoda separării corpurilor asupra acestora (fig. 5.15.b) vor acționa forțe de legătură interioare (V_B, H_B), forțe de legătură exterioare (V_A, H_A, V_C, H_C) și forțe date (P și Q). Forțele necunoscute sunt V_A, H_A, V_B, H_B, V_C, H_C în număr de 6.

Pentru determinarea lor, se exprimă echilibrul fiecărui corp prin câte 3 ecuații scalare de echilibru cu relațiile (5.2):

- *corpul B-C*

$$\sum M_A = 4V_C - 2P = 0 \qquad (a)$$

$$\sum M_B = 4V_B - 2P = 0 \qquad (b)$$

$$R_x = \sum F_{ix} = H_B - H_C = 0 \qquad (c)$$

Din ecuațiile (a) și (b) rezultă $V_B = V_C = \frac{P}{2} = 25\text{kN}$

iar din ecuația (c) se obține relația $H_B = H_C$.

- *corpul A-B*

$$\sum M_A = 4,5H_B - 1,5Q = 0 \qquad (d)$$

$$\sum M_B = 4,5H_A - 3Q = 0 \qquad (e)$$

$$R_x = \sum F_{ix} = -V_A + V_B = 0 \qquad (f)$$

din care se obțin:

$$H_B = \frac{1,5}{4,5}Q = \frac{1}{3}Q = 30\text{kN}$$

$$H_A = \frac{3}{4,5}Q = \frac{1}{1,5}Q = \frac{90}{1,5} = 60\text{kN}$$

$$V_A = V_B = \frac{P}{2} = 25\text{kN}.$$

Observație

Considerând solidificată legătura din B (fig. 5.15.c) sub acțiunea forțelor din legăturile exterioare (V_A, H_A, V_C și H_C) și a celor exterioare efectiv aplicate (P și Q), sistemul de corpuri trebuie să se găsească în echilibru.

Exprimând această condiție cu relațiile (2.20) vom avea:

$$R_x = \sum F_{ix} = Q - (H_A + H_C) = 90 - (60 + 30) = 0$$

$$R_z = \sum F_{iz} = P - (V_A + V_C) = 50 - (25 + 25) = 0$$

$$\sum M_A = 1,5Q + 2P - 4,5H_C - 4V_C =$$

$$= 1,5\times 90 + 2\times 50 - 4,5\times 30 - 4\times 25 =$$

$$= 235 - 235 = 0,$$

în consecință, sistemul de corpuri se va găsi în poziție de echilibru.

Exemplul 5.5.6

Un sistem format din 4 corpuri este alcătuit ca în figura 5.16. Se cer reacțiunile din A și E.

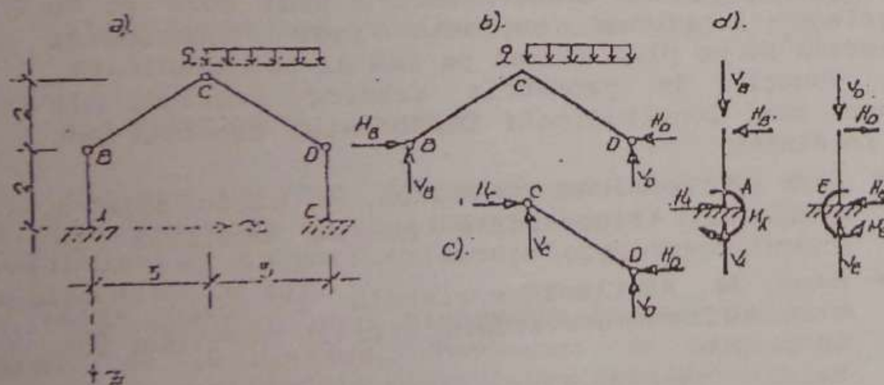


Fig. 5.16

Rezolvare:

Se aplică metoda separării corpurilor. Considerând articulația din C solidificată (fig. 5.16,b) se exprimă echilibrul părții BCD cu ajutorul ecuațiilor (5.2):

$$R_x = H_B - H_D = 0 \qquad (a)$$

$$\sum M_B = 6V_D - 3 \times q \times 4,5 = 0 \qquad (b)$$

$$\sum M_D = 6V_B - 3\times q\times 1,5 = 0 \qquad (c)$$

Izolând apoi corpul CD (fig. 5.16,c) din condiția lui de echilibru exprimată printr-o ecuație de moment nul față de punctul C se obține:

$$2H_D + 3\cdot q\cdot 1,5 - 3V_D = 0 \qquad (d)$$

Din ecuațiile (b), (c) și (d) se obțin:

$$V_D = \frac{1}{6}\times 3\times 20\times 4,5 = 45 \text{ kN};$$

$$V_B = \frac{1}{6}\times 3\times 20\times 1,5 = 15\text{kN}$$

$$H_D = \frac{1}{2}(3\times 45 - 3\times 1,5\times 20) = 22,50\text{kN},$$ după care

din ecuația (a) rezultă $H_B = 22,50$kN.

Exprimând echilibrul consolelor AB și DE prin ecuațiile (2.20) se obțin relațiile:

$-H_B + H_A = 0$; $-V_A + V_B = 0$; $M_A - 2H_B = 0$

$H_D - H_E = 0$; $-V_E + V_D = 0$; $M_E - 2H_D = 0$.

din care se obțin

$H_A = H_B = 22,5$kN; $V_A = V_B = 15$kN; $M_A = 2H_B = 45$kNm;

$H_E = H_D = 22,5$kN; $V_E = V_D = 45$kN; $M_E = 2H_D = 45$kNm;

Sensurile reale ale reacțiunilor sunt cele indicate în figura 5.16,e.

CAPITOLUL 6

RĂSPUNSUL CORPULUI SOLID DEFORMABIL LA ACȚIUNI MECANICE

6.1 MODELAREA CORPURILOR CA ELEMENTE DE CONSTRUCȚIE

Conceptul de solid rigid utilizat în problemele de mecanică studiate, constituie un model mecanic ipotetic ce oferă abordări și soluții deosebit de eficiente în numeroase probleme tehnice.

În realitate corpurile nu sunt indeformabile - sub acțiunea forțelor care le solicită ele își modifică forma și dimensiunile, deci se deformează.

Această proprietate a materiei a determinat adoptarea modelului de *corp deformabil* a cărui configurație geometrică se modifică sub acțiunea solicitărilor (forțelor) la care este supus.

Modelul de solid rigid poate apărea astfel ca un caz limită al modelului de corp solid deformabil. Într-adevăr, considerând că deformațiile unui corp solicitat de un sistem de forțe sunt foarte mici, corpul va tinde a se comporta ca un solid rigid.

Practic, numeroase corpuri solicitate au deformațiile mici în raport cu dimensiunile lor astfel că acestea pot fi neglijate ajungându-se astfel la modelul de corp indeformabil.

Posibilitatea neglijării, în anumite cazuri, a deformațiilor unui corp justifică studiul mecanicii solidului rigid și utilizarea soluțiilor acesteia în numeroase probleme ale mecanicii solidului deformabil. În domeniul construcțiilor, în funcție de formă și raportul principalelor dimensiuni

geometrice, corpurile, ca elemente de construcție poartă denumirea de:

- *B a r e*. Acestea sunt corpuri la care una din dimensiuni este mare în raport cu celelalte două. O bară este caracterizată de geometria axei longitudinale și de forma secțiunii ei transversale.

Vom înțelege prin axă a unei bare locul geometric al centrelor de greutate a secțiunilor ei transversale. În raport de forma acestora se disting:

- bare drepte (fig. 6.1.a, b, c).
- bare curbe sau frânte în plan (fig. 6.1,d).
- bare curbe sau frânte în spațiu (fig. 6.1,e).

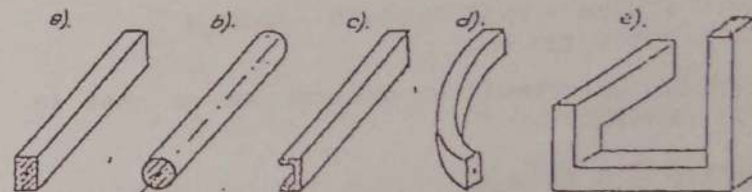


Fig. 6.1

Prin secțiune transversală a unei bare se va înțelege secțiunea obținută prin intersecția acesteia cu un plan normal pe axa ei longitudinală.

Funcție de geometria acestor secțiuni în lungul axei longitudinale în domeniul tehnicii pot fi întâlnite:

- bare de secțiune constantă, a căror arie a secțiunii transversale nu se modifică în lungul acestora.
- bare de secțiune variabilă la care aria secțiunilor transversale variază continuu sau în trepte.

Barele de secțiune foarte mică poartă denumirea de *f i r e*.

• *P l ă c i.* Generic corpurile la care două dimensiuni sunt mari în raport cu cea de-a treia poartă denumirea de plăci (fig. 6.2).

Locul geometric al mijloacelor grosimilor plăcii poartă denumirea de *suprafața mediană* a plăcii. Grosimea plăcii se măsoară normal pe suprafața mediană.

După forma suprafeței mediane se disting: plăci plane (fig. 6.2,a), plăci cu simplă curbură (fig. 6.2,b) și plăci cu dublă curbură (fig. 6.2,c).

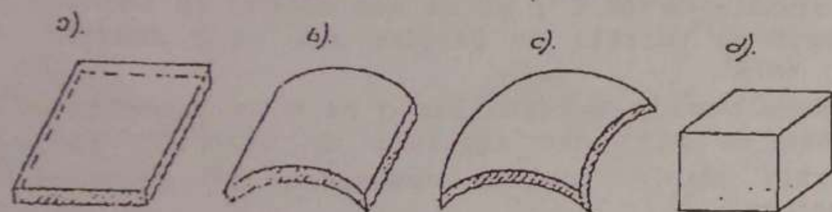


Fig. 6.2

Plăcile având grosimea foarte mică, practic neglijabilă, poartă denumirea de *membrane*.

• *B l o c u r i.* Acestea definesc corpuri ale căror dimensiuni sunt comparabile (fig. 6.2,d).

6.2 TENSIUNI ŞI EFORTURI

Aşa cum se ştie, în interiorul oricărui corp există o serie de forţe interatomice de atracţie şi respingere ce asigură existenţa corpului în forma şi dimensiunile lui.

Sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare corpul se deformează. Fenomenul în sine este rezultatul modificării distanţelor interatomice.

Cum în baza principiului inerţiei o particulă materială nu-şi poate schimba poziţia de repaus decât sub efectul unei forţe perturbatoare rezultă că în interiorul corpului deformabil acţionat de

forţe exterioare iau naştere forţe suplimentare celor de atracţie şi respingere ce au tendinţa de modificare a distanţelor dintre particule.

Acestora, în baza principiului acţiunii şi reacţiunii, atomii le opun forţe de reacţiune egale şi direct opuse numite *forţe interioare*. Ele exprimă ***răspunsul*** materialului din componenţa corpului la acţiunea forţelor exterioare ce-i sunt aplicate.

Punerea în evidenţă şi evaluarea forţelor interioare în Mecanica construcţiilor se face cu ajutorul *metodei secţiunilor*. Pentru prezentarea conţinutului acesteia vom considera un corp deformabil în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare.

Secţionându-l cu un plan oarecare (fig. 6.3.a) se obţin două tronsoane (I) şi (II) (fig. 6.3.b).

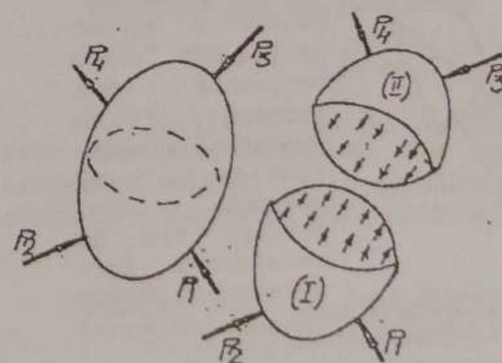


Fig. 6.3

Luate separat, fiecare din acestea, sub acţiunea forţelor ce le revin nu se vor mai găsi în echilibru. Ceea ce-i lipseşte tronsonului (I) pentru a fi în echilibru este efectul mecanic asupra acestuia a tronsonului (II); rezultă astfel că introducând acest efect în secţiune printr-un sistem de forţe continue (pentru că şi legăturile au fost suprimate prin secţionarea corpului continue), tronsonul I se va afla în echilibru (ca şi corpul nesecţionat).

Analog, tronsonului II, pentru a se afla în echilibru îi lipseşte efectul mecanic al tronsonului I asupra acestuia.

Introducând în secţiune acest efect printr-un sistem de forţe continue, tronsonul II, sub acţiunea acestora şi a forţelor exterioare ce-i revin se va afla şi el în echilibru.

Prin urmare, efectul unui tronson asupra celuilalt este echivalent cu un sistem de forţe continue. Considerând acum corpul nesecţionat, în orice secţiune ipotetică a lui efectul unei părţi asupra celeilalte există şi se va exercita identic, în concluzie, în acestea iau naştere forţe interioare.

Observând că orice secţiune a corpului este în echilibru, prin recuplarea tronsonului I şi II forţele continue de pe feţele acestora trebuie să se anuleze reciproc. În consecinţă forţele interioare pe cele două feţe ale unei secţiuni formează totdeauna sisteme egale şi direct opuse.

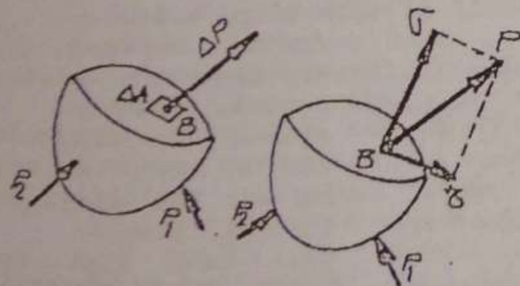


Fig. 6.4

Să considerăm acum un punct arbitrar B situat pe una din feţele secţiunii unui tronson şi o suprafaţă elementară ΔA în jurul acestuia (fig. 6.4,a). Fie ΔP rezultanta forţelor interioare acţionând pe suprafaţa elementară ΔA. Raportul $p_m = \frac{\Delta P}{\Delta A}$ (6.1) poartă denumirea de *tensiune medie totală*. Limita raportului dat de relaţia (6.1) când $\Delta A \to 0$, reprezintă *tensiunea totală* sau *efortul unitar total* în punctul B notat cu p:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad (6.2)$$

Tensiunea totală p are caracter de vector. Componenta acestuia după normala la secţiune poartă denumirea de *tensiune normală* (sau *efort unitar normal*) notată cu σ iar componenta din planul secţiunii se numeşte *tensiune tangenţială* (sau *efort unitar tangenţial*) în punctul respectiv şi se notează cu τ.

Între cele 3 tensiuni există totdeauna relaţia evidentă:

$$\sigma^2 + \tau^2 = p^2 \qquad (6.3)$$

Tensiunile p, σ şi τ reprezintă rapoarte între forţe şi suprafeţe, în consecinţă ele vor avea dimensiunile de $[F.L^{-2}]$ şi se vor măsura în unităţi de forţă pe unităţi de lungime cum sunt daN/cm^2, N/mm^2, kN/m^2.

Rezultantele tensiunilor σ şi τ pe elementele de arie dA ale unei secţiuni au valorile σdA, respectiv τdA şi poartă denumirea de *eforturi elementare*.

Reducând în centrul de greutate a secţiunii eforturile elementare se obţine un număr de 6 mărimi mecanice numite *eforturi secţionale* sau simplu *eforturi* ce caracterizează solicitarea globală a întregii secţiuni considerate. Pentru exprimarea acestora vom raporta tronsoanele rezultate prin secţionare la un triedru cartezian cu axele Oy şi Oz conţinute în planele feţelor secţiunii fiecăruia (fig. 6.5).

Prin reducerea efortului elementar σdA în centrul de greutate "O" al secţiunii se obţine (fig. 6.5.b):

- o forţă N, reprezentând proiecţia după axa barei a tuturor eforturilor elementare σdA, numită *forţă axială*:

$$N = \int_A \sigma dA \qquad (6.4)$$

pozitivă dacă este orientată înspre normala exterioară a secțiunii și negativă în caz contrar.

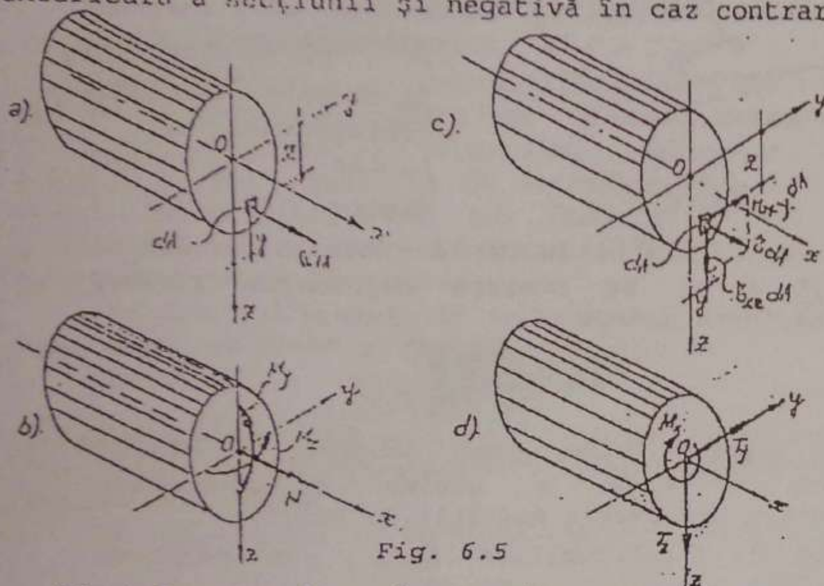


Fig. 6.5

Efectele mecanice ale acestor sensuri sunt de *întindere* și respectiv de *comprimare* a corpului, prin urmare forța tăietoare este pozitivă dacă produce în secțiunea considerată întinderi și negativă dacă produce compresiune.

- două momente M_y și M_z ce au tendința de rotire a feței secțiunii în jurul axelor Oy și Oz, numite *momente încovoietoare*:

$$M_y = \int_A \sigma z dA \qquad (6.5)$$

$$M_z = \int_A \sigma y dA \qquad (6.6)$$

pozitive când au sensul momentelor date de un efort elementar σdA pozitiv acționând în cadranul I ($y>0$; $z>0$).

Considerând acțiunea efortului elementar τdA prin efectul componentelor ei $\tau_{xy}dA$ și $\tau_{xz}dA$ (fig. 6.5,c) componentele ei de reducere în raport cu același punct O vor fi (fig. 6.5.d):

- două forțe T_y și T_z conținute în planul secțiunii numite *forțe tăietoare:*

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA \qquad (6.7)$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA \qquad (6.8)$$

- un moment M_x ce are tendința de rotire a feței secțiunii în jurul axei Ox, numit *moment de torsiune* sau de *răsucire*:

$$M_x = M_t = \int_A \left(\tau_{xzy} - \tau_{xyz}\right) dA \qquad (6.9)$$

Eforturile N, M_y, M_z, T_y, T_z și M_x pe cele două fețe ale unei secțiuni din corp (bară) formează totdeauna perechi egale și direct opuse reprezentând efectul tronsonului înlăturat asupra celui păstrat.

6.3 DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII. LEGĂTURA DINTRE TENSIUNI ȘI DEFORMAȚII. LEGEA LUI HOOKE

Deformabilitatea reprezintă proprietatea corpurilor de a-și modifica forma și dimensiunile sub acțiunea forțelor exterioare, a variațiilor de temperatură etc. Ea diferă de la corp la corp fiind în strânsă legătură cu proprietățile fizice ale acestora, cu forma, dimensiunile și modul lor de fixare.

Proprietatea corpurilor de a-și reveni la forma lor inițială, după înlăturarea cauzelor ce le-au deformat poartă denumirea de *elasticitate*.

Reprezentând modificări de formă și dimensiuni, deformarea corpurilor se va exprima prin mărimi geometrice (lungimi, unghiuri). Pentru

prezentarea acestora vom considera corpul deformabil din figura 6.6, în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură și un punct arbitrar al acestuia A (fig. 6.6).

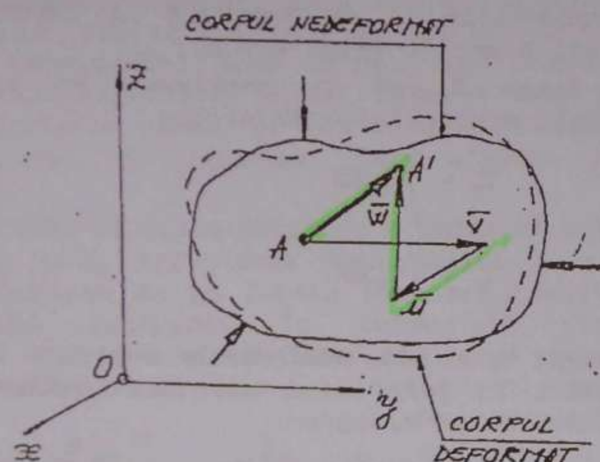


Fig. 6.6

Prin deformare punctul A ajunge într-o altă poziție A'. Segmentul $\overline{AA'}$ poartă denumirea de vector *deplasare totală* a punctului A. Proiecțiile acestuia după axele sistemului de referință 0x, 0y și 0z se notează cu u, v și w (fig. 6.6) și poartă denumirea de *deplasări*.

Imaginându-ne corpul ca fiind alcătuit dintr-o mulțime de paralelipipede elementare, prin deformare, muchiile acestora își modifică dimensiunile iar unghiurile dintre ele, inițial drepte se modifică. Modificarea distanțelor dintre două puncte din corp și a unghiurilor între două direcții poartă denumirea de *deformații*.

Pentru definirea acestora vom considera în corp (fig. 6.7) punctele A și B definind segmentul $AB=\ell$ și punctele C, 0 și D formând unghiul drept $\widehat{COD}$.

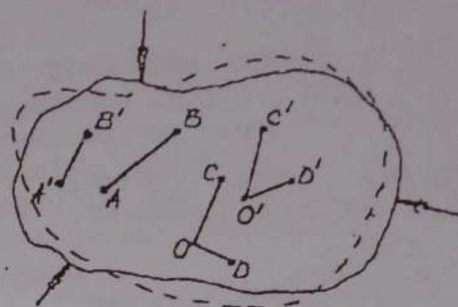


Fig. 6.7

Prin deformarea corpului toate punctele menționate își vor modifica poziția ajungând în A', B', C', D' și 0'. Mărimea $\Delta\ell = A'B' - AB = \ell' - \ell$ se numește *deformație liniară absolută*. Limita raportului dintre $\Delta\ell$ și ℓ definit prin relația (6.10) se notează cu litera grecească ε și se numește *deformație liniară specifică*, prin urmare

$$\varepsilon = \lim_{\ell \to 0} \frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad (6.10)$$

Ca raport între două lungimi, alungirea specifică ε este o mărime adimensională, reprezentând deformația unității de lungime.

Dacă $\ell' > \ell$ deformațiile $\Delta\ell$ și ε sunt pozitive și reprezintă *întinderi* iar dacă $\ell' < \ell$ ele au valori negative și reprezintă *scurtări*.

Mărimea γ definită prin relația (6.11) poartă denumirea de *deformație unghiulară sau lunecare specifică* în punctul 0 al planului COD:

$$\gamma = \lim_{\substack{CO \to 0 \\ DC \to 0}} \left(\widehat{COD} - \widehat{C'O'D'} \right) \qquad (6.11)$$

Lunecarea γ este deci un unghi și se măsoară în radiani. Dacă reprezintă o micșorare a unghiurilor drepte lunecarea γ se consideră pozitivă - în caz contrar ea este negativă și reprezintă o mărire a unghiului drept.

Deformațiile γ și ε pot fi:

• *elastice* atunci când se anulează după îndepărtarea cauzei ce le-a produs.

• *remanente* când se menţin şi după îndepărtarea cauzei care le-a generat.

Tensiunile σ şi τ şi deformaţiile ε şi γ definite mai sus reprezintă *cauza* şi *efectul* aceluiaşi fenomen - al deformării corpurilor. Legătura dintre acestea a fost stabilită de matematicianul englez Robert Hooke (1635-1703) sub forma unei *legi de proporţionalitate* între tensiunile şi deformaţiile elastice produse de acestea.

În domeniul elastic de solicitare al materialelor, legea lui Hooke se exprimă prin relaţia:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad (6.12)$$

în care E reprezintă un factor de proporţionalitate numit *modul de elasticitate longitudinală* sau *modulul lui Young*.

O lege de aceeaşi formă există şi între τ şi γ:

$$\tau = G \cdot \gamma \qquad (6.13)$$

în care G reprezintă *modulul de elasticitate transversală* a materialului.

Modulii E şi G au aceleaşi dimensiuni şi se măsoară în aceleaşi unităţi ca şi tensiunile σ şi τ.

6.4 COMPORTAREA MATERIALELOR SUB SARCINI. CARACTERISTICILE MECANICE ALE MATERIALELOR

În tehnica construcţiilor se utilizează o mare varietate de materiale: piatra, lemnul, oţelul, masele plastice, betoanele, sticla etc.

Elementele de rezistenţă (stâlpi, grinzi, pereţi etc.) realizate din acestea sunt corpuri solide deformabile.

Sub efectul acţiunii forţelor exterioare în interiorul acestora iau naştere forţe interioare (conform celor arătate în paragraful 6.2) şi se produc deformaţiile ε şi γ definite în aliniatul 6.3.

Tensiunile (σ,τ) şi deformaţiile (ε,γ) ce iau naştere într-o secţiune a corpului caracterizează aşa numita *stare de solicitare şi deformaţie* din secţiunea considerată şi sunt preluate de materialul din componenţa corpului.

Capacitatea acestuia de a prelua forţe şi deformaţii este însă limitată. La o anumită valoare a acestora $(\sigma_r,\ \tau_r,\ \varepsilon_r,\ \gamma_r)$ materialul se rupe (cedează).

Perechile de valori σ_r-ε_r, τ_r-γ_r pentru care are loc ruperea sunt specifice fiecărui material în parte, în consecinţă ele reprezintă *caracteristici mecanice ale materialului*.

Determinarea lor se face pe cale experimentală, prin încercări mecanice ce se efectuează pe *probe* sau *epruvete*, confecţionate din materialul studiat.

În cazul materialelor de construcţii principalele caracteristici mecanice se deduc prin încercările la întindere şi la compresiune. Efectuarea lor se realizează pe epruvete de forma celor arătate în figura 6.8 cu ajutorul unor maşini special destinate acestui scop numite prese pentru încercări mecanice.

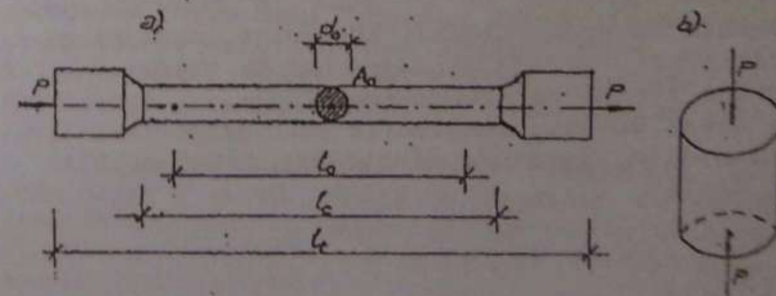


Fig. 6.8

ℓ_c – lungimea calibrată, de formă cilindrică având suprafaţa riguros prelucrată.

A, B – repere fixate pe ℓ_c

ℓ_0 – baza de măsurare, folosită pentru determinarea deformaţiilor liniare.

Încărcarea epruvetelor se face progresiv, de la zero la rupere. Sub acţiunea încărcării exterioare în epruvetă iau naştere tensiuni normale σ şi deformaţii specifice ε, valorile acestora crescând şi ele progresiv de la zero la cele de rupere σ_r, ε_r.

Dacă în orice moment al încercării sunt determinate şi reprezentate grafic perechile de valori σ-ε se obţine un grafic ce poartă denumirea de *curbă caracteristică a materialului* la solicitarea efectuată. Această curbă, specifică fiecărui material în parte, pune în evidenţă comportarea sub încercări a materialului respectiv permiţând stabilirea principalelor sale caracteristici mecanice folosite în calculul de *rezistenţa materialelor.*

Pentru ilustrare, în figura 6.9 este prezentată curba caracteristică la întindere şi compresiune a oţelului moale pentru construcţii, obţinută pe baza încercărilor mecanice efectuate pe epruvete de forma arătată în figurile (6.8,a) şi (6.8,b).

Alura acesteia prezintă:

- porţiune dreaptă OP ce pune în evidenţă un domeniu de proporţionalitate între tensiuni şi deformaţii, delimitat superior de valoarea σ_p numită *limită de proporţionalitate.*

Pe acest domeniu tensiunile sunt proporţionale cu deformaţiile, legătura dintre ele fiind dată de relaţia (6.12).

- porţiune curbă PE, puţin diferită de dreapta PE, delimitată superior de valoarea σ_E numită *limită de elasticitate* a materialului.

Încărcat până la atingerea tensiunii σ_E şi apoi descărcat de forţe, corpul îşi revine la forma şi dimensiunile lui iniţiale, materialul acestuia comportându-se perfect elastic.

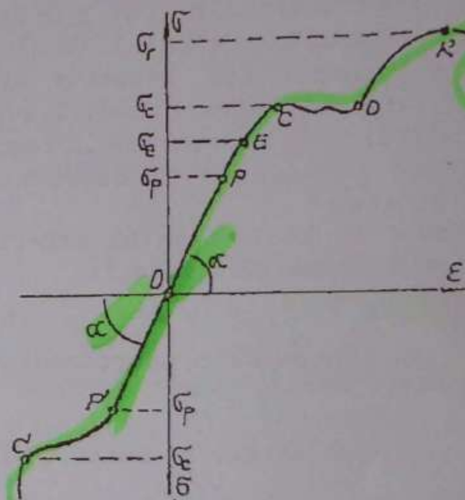


Fig. 6.9

- o porţiune curbă E-C, a cărei înclinaţie spre axa Oε creşte, ce pune în evidenţă o creştere mai accentuată a deformaţiilor ε cu creşterea tensiunilor σ. Superior aceasta este delimitată de tensiunea σ_c numită *limită de curgere.*

La atingerea acestei valori deformaţiile cresc foarte mult fără o creştere a tensiunilor sau chiar însoţită de scăderea acestora.

- o porţiune C-D formată dintr-o linie neregulată, aproximativ paralelă cu axa Oε numită *palier de curgere* al materialului care se întinde între punctele C şi D.

- porțiune curbă D-R a cărei înclinație spre axa $O\varepsilon$ crește foarte mult cu creșterea tensiunilor σ, punând în evidență creșteri importante a deformațiilor ε la creșteri mici ale tensiunilor σ. Superior aceasta este delimitată de tensiunea σ_R reprezentând tensiunea maximă preluată de material.
- porțiune curbă descendentă R-R′ pe care deformațiile ε cresc în timp ce tensiunile scad. Cauza fenomenului este legată de gâtuirea (reducerea secțiunii) epruvetei la atingerea tensiunii σ_R.

Capătul acestei curbe este punctul R′ căruia îi corespunde tensiunea $\sigma_{R'}$ la care epruveta (materialul) se rupe.

Dacă încărcarea epruvetei este de compresiune (fig. 6.8,b) legătura dintre tensiunile σ și deformațiile ε se obține în același mod. Reprezentând grafic perechi de valori σ și ε în sistemul de axe $(-0\varepsilon;-0\sigma)$ se obține curba caracteristică a oțelului la compresiune (fig. 6.9). În geometria acestora se disting:

- un domeniu de proporționalitate OP′ pe care tensiunile de compresiune ($\sigma < 0$) sunt proporționale cu deformațiile specifice ε reprezentând scurtări ($\varepsilon < 0$). Inferior acesta este delimitat de punctul P′ căruia îi corespunde limita de proporționalitate la compresiune $\sigma_{p'} \approx \sigma_p$
- porțiune curbă P′-C′ delimitată superior de tensiunea de curgere $\sigma_{c'} \approx \sigma_c$. Mai departe, pentru valori $\sigma > \sigma_{c'}$ epruveta se turtește fără a interveni ruperea materialului.

Alte materiale, la aceleași solicitări, prezintă curbe caracteristice diferite față de curba caracteristică a oțelului, moale, anumite zone și puncte caracteristice fiind neglijabile sau chiar inexistente.

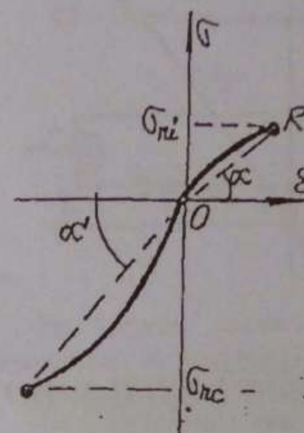


Fig. 6.10

Așa spre exemplu, în curba caracteristică a fontei (fig. 6.10) singurul punct ce poate fi pus în evidență este cel corespunzător ruperii. Ramurile $\overset{\frown}{OR}$ și $\overset{\frown}{OR'}$ ale curbei diferă de dreptele $\overline{OR}$ și $\overline{OR'}$ astfel că legea lui Hooke este aplicabilă numai în limitele unor aproximații.

Rezistența la rupere prin întindere σ_{rt} este diferită de rezistența la rupere prin compresiune σ_{rc}. Curba caracteristică a oțelului (fig. 6.9) este reprezentativă pentru *materialele ductile*, la care ruperea este precedată de apariția și dezvoltarea unor deformații mari. La rândul ei, curba caracteristică a fontei (fig. 6.10) este tipică *materialelor casante*, la care ruperea precede deformații neînsemnate.

Utilizarea în calcule a curbelor caracteristice reale ale materialelor (fig. 6.9) este în general dificilă. Din acest motiv în locul acestora sunt folosite *curbe caracteristice schematizate*.

Astfel, pentru materialele ductile se folosește curba unui material *ideal elasto-plastic* compusă din două porțiuni drepte OC și CR (fig. 6.11,a) iar pentru materialele casante curba corespunzătoare unui material *ideal liniar elastic* (fig. 6.11,b).

În baza acestora, între tensiunile σ și deformațiile ε se admite o legătură de proporționalitate până la atingerea limitei de curgere σ_c la materialele ductile și a limitei de rupere σ_r la materialele casante.

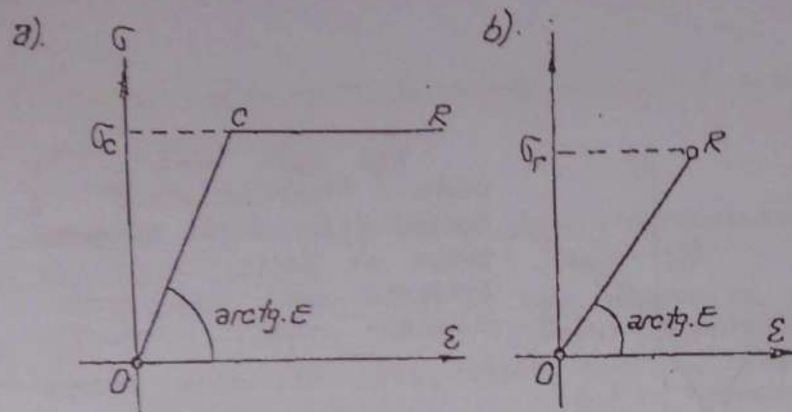


Fig. 6.11

Tensiunile σ_p, σ_e, σ_c, σ_r, $\sigma_{p'}$, $\sigma_{c'}$ modulul de elasticitate longitudinală E şi modulul de elasticitate transversală G, constituie caracteristici mecanice ale materialelor. Ele reprezintă o măsură a proprietăţilor mecanice ale materialelor, marcând frontierele la care răspunsul acestora la acţiunea forţelor se modifică calitativ. Pe baza lor este precizată comportarea materialului pe anumite trepte de solicitare, permiţând astfel controlul răspunsului unui material la solicitările exterioare.

O problemă fundamentală a mecanicii structurilor de rezistenţă o constituie asigurarea acestora împotriva ruperii (cedării) sub acţiunea încărcărilor la care sunt supuse. Referindu-ne la un element de rezistenţă (grindă, stâlp etc.) în care solicitările exterioare produc tensiuni normale σ, acesta va prelua încărcarea exterioară fără a se rupe atât timp cât în cea mai solicitată secţiune a sa (numită şi secţiune periculoasă) tensiunile menţionate vor îndeplini condiţia evidentă:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_r \qquad (6.14)$$

În cazul materialelor ductile, condiţia de rezistenţă este exprimată în funcţie de σ_c prin relaţia:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_c \qquad (6.15)$$

Pentru a se avea certitudinea că relaţiile (6.14 şi 6.15) vor fi satisfăcute în orice situaţie, tensiunile σ_{max} se limitează la o fracţiune din tensiunile de cedare (σ_r, σ_c) numită rezistenţă de calcul a materialului, notată cu R. Cu aceasta condiţia de rezistenţă într-o secţiune se va exprima prin relaţia:

$$\sigma_{max} \leq R \qquad (6.16)$$

Pentru corpurile în secţiunile cărora iau naştere tensiuni tangenţiale τ (forfecarea şi torsiunea pură) condiţia de rezistenţă se exprimă prin relaţia:

$$\sigma_{max} \leq R_f \qquad (6.17)$$

Rezistenţele de calcul R şi R_f reprezintă la rândul lor caracteristicile mecanice de calcul ale materialelor. Valorile lor sunt date în standarde şi norme tehnice, fiind specifice fiecărui corp, prin urmare reprezintă caracteristici ale acestora. Astfel, pentru oţelul Ob37 folosit în construcţii $R=2100$daN/cmp, $E=2.1\cdot10^6$daN/cmp; $R_f=(0.65+0.80)R$ iar pentru lemnul de răşinoase $R=(100..110)$daN/cmp, $E=0.1\cdot10^6$daN/cmp.

6.5 IPOTEZELE DE CALCUL ALE REZISTENŢEI MATERIALELOR

Exprimarea prin formule matematice a comportării corpurilor deformabile sub acţiunea forţelor aplicate asupra lor se face pe baza unor *ipoteze simplificatoare de calcul* privitoare la structura, proprietăţile materialelor şi caracterul

deformaţiilor. Deşi schematizează fenomenele naturale, ele reflectă cu suficientă rigurozitate comportarea reală a corpurilor, utilizarea lor facilitând abordări şi simplificări de calcul însemnate. Aceste ipoteze sunt:

1. Materia din care sunt alcătuite corpurile (elemente de construcţie) este *continuă*, în consecinţă întregul volum al corpului este umplut cu material. În baza acesteia, toate mărimile privitoare la proprietăţile materialelor şi starea de solicitare din corp vor fi reprezentate prin funcţii continue pe domeniul studiat.

2. Materialul corpurilor se consideră *omogen şi izotrop*, adică prezintă aceleaşi proprietăţi în orice punct şi pe orice direcţie.

3. *Deformaţiile* corpurilor (elementelor de construcţie) *sunt mici* în raport cu dimensiunile lor. Urmare acestui fapt exprimarea echilibrului forţelor se poate face pe forma nedeformată a corpului.

4. Corpurile se consideră *perfect elastice*, legătura dintre tensiunile şi deformaţiile ce iau naştere în acestea fiind dată de legea lui Hooke. Valabilitatea ipotezei se extinde până la tensiuni $\sigma \leq \sigma_e$ în cazul materialelor ductile şi $\sigma \leq \sigma_r$ la materialele casante (fig. 6.11).

5. Se admite valabilitatea *principiului lui Baré de Saint Venand* conform căruia modul de aplicare a sistemelor de forţe static echivalente influenţează apreciabil starea de tensiune şi deformaţii în zona lor de acţiune dar are o influenţă neglijabilă în zonele suficient de îndepărtate de locul de aplicare.

Pentru ilustrare în figura (6.12) s-au prezentat 4 moduri diferite de realizare a unei solicitări de întindere şi zonele influenţate de modalităţile de aplicare a încărcărilor.

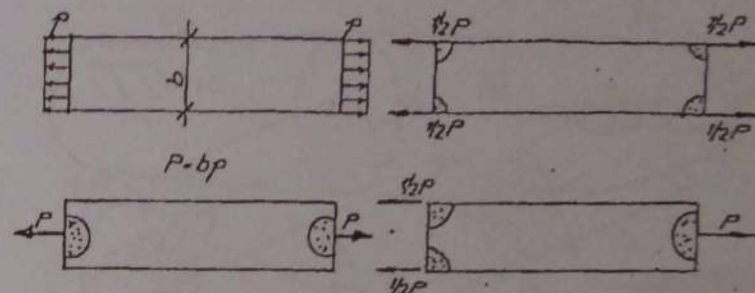


Fig. 6.12

În afara acestora starea de tensiune şi deformaţie a corpului este identică, ea nu depinde deci de modul de aplicare a forţelor.

6. *Ipoteza lui Bernoulli* în baza căreia o secţiune plană şi normală pe axa unei bare înainte de deformaţie, rămâne plană şi normală pe axa aceleiaşi bare şi după deformare.

7. *Deformaţiile* secţiunilor transversale ale barelor sunt mici şi se neglijează.

6.6 DETERMINAREA EFORTURILOR SECŢIONALE

Eforturile N, T (T_y, T_z), M_i (M_y, M_z) şi M_x=M_t definite prin relaţiile (6.4)..(6.9) reprezintă la rândul lor efectul tronsonului înlăturat asupra celui păstrat exprimat prin intermediul forţelor interioare elementare σdA, τdA. Acestea sunt însă necunoscute, motiv pentru care calculul eforturilor cu aceste relaţii este practic imposibil.

Utilizând aceeaşi *metodă a secţiunilor*, efectul unui tronson asupra celuilalt poate fi însă înlócuit cu elementele de reducere a forţelor exterioare (de regulă cunoscute) de pe tronsonul înlăturat (fig. 6.13,a) calculate în centrul de greutate a feţei tronsonului păstrat (fig. 6.13,b). În cel mai general caz de încărcare a corpului (fig. 6.13,a) pe fiecare tronson obţinut prin secţionare, vor acţiona sisteme de forţe oarecare în spaţiu.

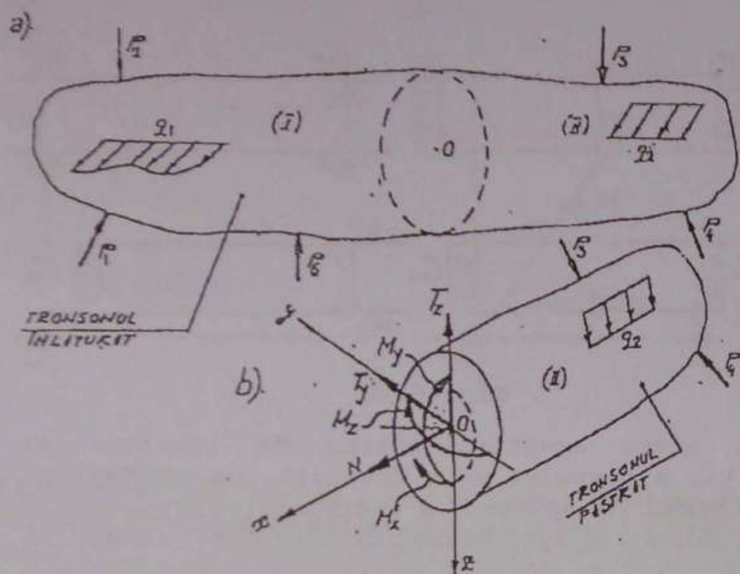


Fig. 6.13

Reduse în centrul de greutate a feței tronsonului păstrat (fig. 6.13,b), raportat la sistemul cartezian Oxyz cu axele Oy și Oz în planul secțiunii, acestea dau naștere forțelor N, T_y, T_z și momentelor M_y, M_z și M_x reprezentând eforturile secționale în secțiunea considerată. Prin urmare:

- *forța axială* N într-o secțiune a unui corp reprezintă suma proiecțiilor după axa acestuia a tuturor forțelor de pe tronsonul înlăturat, fiind pozitivă când este orientată după normala exterioară a secțiunii și negativă în caz contrar (fig. 6.14,a).
- *forțele tăietoare* T_z și T_y reprezintă suma proiecțiilor după axele Oz și Oy a tuturor forțelor de pe tronsonul alăturat.

Semnul acestora este pozitiv când au tendința de rotire a tronsonului pe a cărui față acționează în sens orar și negative în caz contrar (fig. 6.14.b).

- *momentul încovoietor* M_y într-o secțiune reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de pe tronsonul înlăturat în raport cu axa Oy. Efectul mecanic al acestuia este de rotire a secțiunii (considerate ca o șaibă rigidă) în jurul axei Oy.

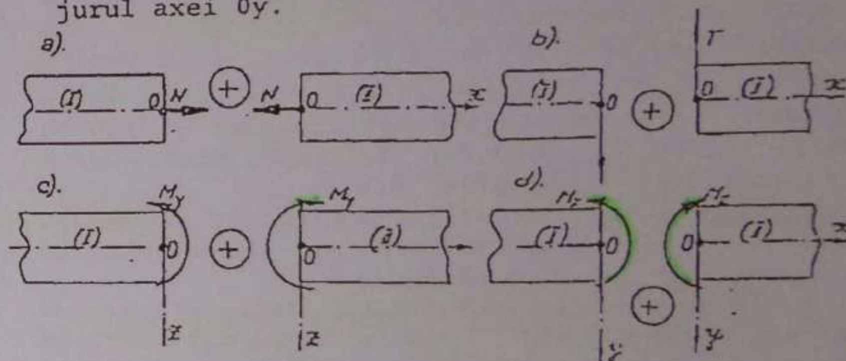


Fig. 6.14

Este pozitiv când prin rotirea menționată sunt întinse fibrele extreme ale tronsonului situate spre sensul pozitiv al axei z și negativ în caz contrar (fig. 6.14,c).

- *momentul încovoietor* M_z reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de pe tronsonul înlăturat calculate în raport cu axa Oz. Are ca efect mecanic tendința de a roti secțiunea în jurul axei Oz. Este pozitiv când întinde fibrele extreme ale secțiunii situate spre sensul pozitiv al axei Oy și negativ în caz contrar (fig. 6.14,d).
- *momentul de torsiune* M_x într-o secțiune reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de pe tronsonul înlăturat în raport cu axa Ox.

Efectul său mecanic este de rotire a secțiunii în jurul axei Ox. Semnul pozitiv al acestuia se alege convențional.

Observație

În figura 6.13 a fost înlăturat tronsonul din stânga și păstrat cel din dreapta (fig. 6.13,b).

Dacă s-ar fi înlăturat tronsonul din dreapta și s-ar fi păstrat cel din stânga, pe fața secțiunii acestuia s-ar fi obținut aceleași eforturi N, T_y, T_z, M_y, M_z și M_x.

Prin urmare, eforturile secționale susmenționate formează pe cele două fețe a oricărei secțiuni perechi egale și direct opuse.

Urmare acestui fapt alegerea tronsonului înlăturat este arbitrară. Pentru economia calculului se recomandă ca acesta să fie selectat în funcție de încărcări (cel mai simplu și mai puțin încărcat).

6.7 TIPURI DE SOLICITĂRI

Eforturile N, T_y, T_z, M_y, M_z și $M_x=M_t$ pot fi parțial sau în totalitate diferite de zero.

Dacă într-o secțiune este diferit de zero un singur efort solicitarea acestuia se numește *simplă* sau *pură*.

Funcție de natura acestuia se disting următoarele solicitări simple:

- *întinderea și compresiunea centrică* $N\neq0$; $T=M=M_t=0$ (fig. 6.15,a).
- *forfecarea pură* $T\neq0$ (T_y sau T_z) $N=M=M_t=0$ (fig. 6.15,b).
- *încovoierea pură* $M\neq0$ (M_y sau M_z); $N=T=M_x=0$ (fig. 6.15,c).
- *torsiunea* $M_t\neq0$; $N=M=T=0$ (fig. 6.15,d).

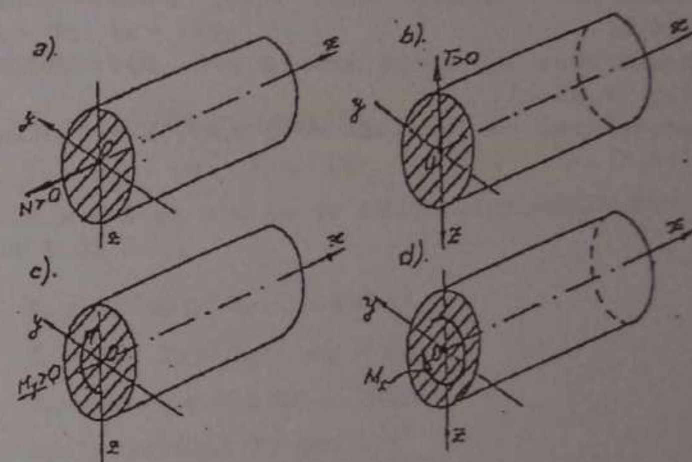


Fig. 6.15

Dacă însă, într-o secțiune transversală sunt diferite de zero două sau mai multe eforturi, solicitarea respectivă se numește ***compusă*** (fig. 6.16).

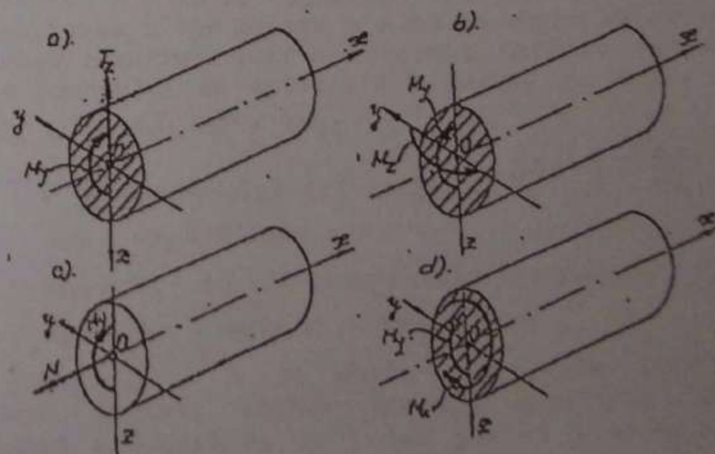


Fig. 6.16

Principalele solicitări compuse sunt:

- încovoierea cu forță tăietoare $M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = M_t = 0$ (fig. 6.16,a).
- încovoierea oblică $M_y \neq 0$; $M_z \neq 0$; $N = M_x = 0$ (fig. 6.16,b).
- încovoierea cu forță axială $N \neq 0$; $M \neq 0$; $T = M_t = 0$ (fig. 6.16,c).
- încovoierea cu torsiune $M \neq 0$; $M_x \neq 0$; $N = T = 0$ (fig. 6.16,d).

CAPITOLUL 7

DIAGRAME DE EFORTURI LA STRUCTURI ALCĂTUITE DIN BARE

7.1 DEFINIȚII. TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI PE BAZA EXPRESIEI LOR ANALITICE

Eforturile secționale sunt mărimi mecanice ce caracterizează solicitarea întregii secțiuni normale a unei bare. Cum poziția unei secțiuni în lungul barei se definește prin abscisa x măsurată de la un punct arbitrar luat drept origine și cum eforturile depind în general de secțiune, rezultă că ele se vor exprima prin funcții de variabila x:

$$N = N(x); \quad M_y = M_y(x)$$
$$T_y = T_y(x); \quad M_z = M_z(x) \qquad (7.1)$$
$$T_z = T_z(x); \quad M_t = M_t(x)$$

Graficele acestor funcții poartă denumirea de diagrame de eforturi; vom avea astfel diagramele eforturilor N, T_y, T_z, M_y, M_z și M_t.

În raport de natura încărcărilor (continue sau discontinue), eforturile au expresii analitice diferite corespunzătoare intervalelor de încărcare continuă sau a celor dintre două încărcări punctuale consecutive.

Notând cu x abscisa secțiunii curente a barei, funcțiile eforturilor din relațiile (7.1) se obțin în baza semnificației mecanice a fiecăruia dintre ele. Astfel, pentru grinda din fig. (7.1) încărcată discontinuu, cu forța continuă q (uniform distribuită) și forța concentrată P = 32q,

expresiile analitice ale eforturilor pe intervalele A-C, C-D şi D-B vor fi:

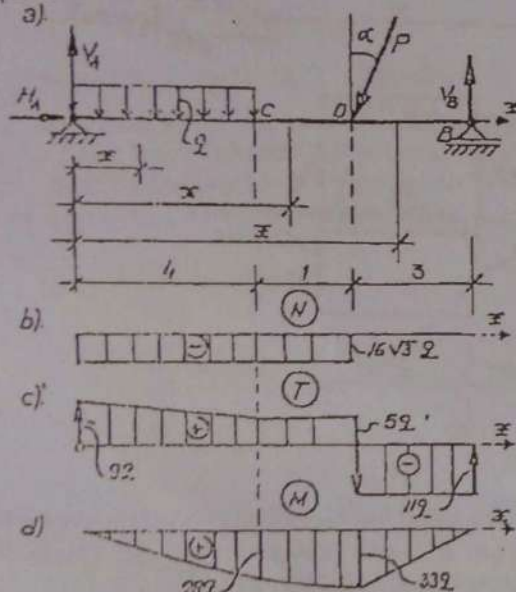


Fig. 7.1

$H(x) = P_x = P \cdot \sin\alpha = \alpha$

$M(x) = P_x \cdot x = P \cdot x \cdot \cos\alpha$

$x = 0 \;\; M_c = P \cdot 0 \cdot \cos\alpha = 0.$

$x = l \;\; M_c = P \cdot l \cdot \cos\alpha$

- *Pe intervalul I (A-C):*

$N_I = -H_A;\ T_I = V_A - qx;$

$M_I = V_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = V_A x - q \cdot \frac{x^2}{2}$

Reacţiunile din reazeme se determină exprimând echilibrul grinzii printr-o ecuaţie de proiecţie după axa x şi două ecuaţii de moment nul în raport cu punctele A şi B,

$R_x = H_A - P \cdot \sin\alpha = 0$

$M_B = 8V_A - 6 \cdot 4q - 3P\cos\alpha = 0$

$M_A = 8V_B - 2 \cdot 4q - 5P\cos\alpha = 0.$

Rezolvând ecuaţiile de mai sus se obţin: $H_A = 16\sqrt{3}q;\ V_A = 9q;\ V_B = 11q.$

Cu acestea:

$N_I = -16\sqrt{3}q$ = constant

$T_I = 9q - qx;\quad M_I = 9qx - q \cdot x^2/2$

Pentru x = 0 şi x = 4m se obţin eforturile din secţiunile A şi C:

$N_A = -16\sqrt{3}q;\ N_C = -16\sqrt{3}q;$

$T_A = 9q;\ T_C = 9q - 4q = 5q;$

$M_A = 0;\ M_C = 36q - 8q = 28q;$

- *Pe intervalul II (C-D):*

$N_{II} = -16\sqrt{3}q$ = constant

$T_{II} = V_A - 4q = 5q$ = constant

$M_{II} = V_A x - 4q(x-2) = 9qx - 4q(x-2)$

Pentru x = 4m se regăsesc valorile eforturilor din secţiunea C iar pentru x = 5m se obţin valorile aceloraşi eforturi într-o secţiune infinit vecină stânga punctului de aplicaţie a forţei P, $N_D^{st} = -16\sqrt{3}q;\ T_D^{st} = 5q;\ M_D^{st} = 33q;$

$9q - 4q - 32q \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

- *Pe intervalul III (D-B):*

13-

$N_{III} = -H_A + P \cdot \sin\alpha = 0$

$T_{III} = V_A - 4q - P \cdot \cos\alpha = -11q$ = constant

$M_{III} = V_A x - 4q(x-2) - P(x-5)\cos\alpha$

Pentru x = 5 se obţin eforturile într-o secţiune infinit vecină dreapta punctului de aplicaţie a forţei P, (D^{dr}) iar pentru x = 8m se obţin eforturile din secţiunea B:

$N_D^{dr} = 0;\ N_B = 0;$

$T_D^{dr} = -11q;\ T_B = -11q;$

$M_D^{dr} = 33q;\ M_D = 0;$

Alegând un sistem de referință format din axa barei, ca axă a absciselor și normala pe aceasta ca axă a eforturilor (N, T, M) se obțin graficele din figurile 7.1,b, 7.1,c și 7.1,d care reprezintă diagramele eforturilor N, T și M pe bară din încărcarea dată.

7.2 RELAȚIILE DIFERENȚIALE DINTRE EFORTURI ȘI ÎNCĂRCĂRI ȘI UTILIZAREA LOR LA TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI

Trasarea diagramelor de eforturi pe baza expresiilor analitice ale acestora este dificilă, în special atunci când încărcările sunt mai complexe, conducând la un număr mare de intervale și la funcții ale eforturilor de grad superior.

Metoda practică ce elimină inconvenientele menționate substituie găsirea și reprezentarea grafică a unor funcții analitice prin determinarea valorii eforturilor respective în anumite *secțiuni caracteristice* ale barei, trasarea diagramelor de eforturi făcându-se apoi pe baza unor *relații diferențiale* ce există între eforturi și încărcările continue.

Modul de calcul al eforturilor în secțiuni se face conform celor arătate în aliniatul 6.6. Pentru stabilirea relațiilor diferențiale menționate vom considera o bară solicitată de un sistem de forțe coplanare (concentrate, distribuite și cupluri) și două secțiuni x și x+dx situate pe intervalul încărcat cu forțe continue (fig. 7.2,a).

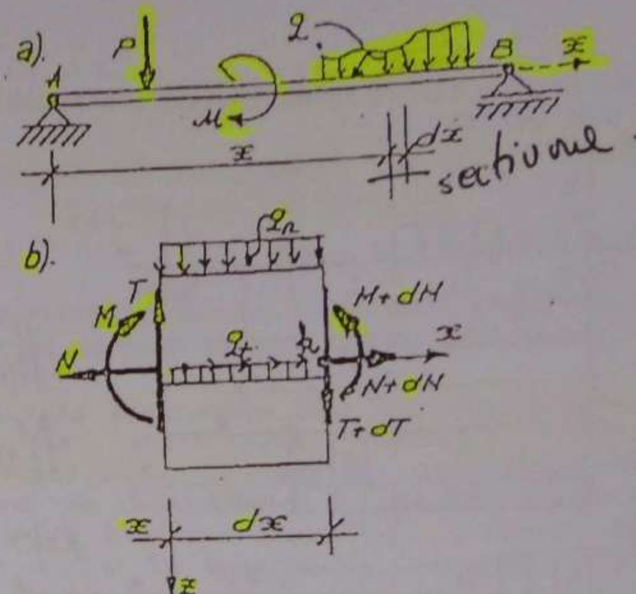


Fig. 7.2

Detașând lungimea de bară dx, asupra acesteia vor acționa forța q, (de componente q_n și q_t după normala și tangenta la axa barei) și eforturile de continuitate din cele două secțiuni. Deoarece lungimea dx poate fi luată oricât de mică, forța q și componentele ei q_n și q_t pot fi considerate ca uniform distribuite pe acest interval.

Fie N, T și M eforturile produse de încărcări în secțiunea x.

Cum aceste mărimi sunt funcții continue, creșterii abscisei de la x la x+dx îi vor corespunde creșteri corespunzătoare a eforturilor, astfel că valoarea acestora în secțiunea x+dx vor fi: N+dN, T+dT și M+dm (fig. 7.2,b).

Exprimând echilibrul elementului detașat prin două ecuații de proiecții nule în raport cu axele x și z și o ecuație de moment nul în raport cu punctul k (fig. 7.2,b) se obține:

$R_x = \sum F_{ix} = -N + q_x dx + N + dN = 0$

$$-N + q_t dx + N + dN = 0$$

$$-T + q_n dx + T + dT = 0$$

$$-M + Tdx - q_n dx \cdot dx/2 - (M+dM) = 0$$

Dacă în relațiile de mai sus se reduc termenii asemenea și se neglijează pătratul cantității dx, ca mărime infinitezimală la puterea a doua, după împărțirea egalității cu dx rezultă:

$$\frac{dN}{dx} = -q_t \tag{7.2}$$

$$\frac{dT}{dx} = -q_n \tag{7.3}$$

$$\frac{dM}{dx} = T \tag{7.4}$$

Derivând odată relația (7.4) se obține:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q_n \tag{7.5}$$

Expresiile (7.2)...(7.5) poartă denumirea de *relațiile diferențiale ale barei drepte*.

Interpretarea lor matematică furnizează elemente deosebit de utile în trasarea diagramelor de eforturi. Astfel:

1° Pornind de la ecuația (7.2) se deduce că *derivata forței axiale N în raport cu abscisa x este egală cu intensitatea sarcinii continute ce acționează în lungul axei barei luată cu semn schimbat*. Ținând seama de legătura dintre derivata unei funcții și funcție, cunoscută din Analiza Matematică, deducem următoarele reguli practice:

- dacă pe o bară sau o porțiune de bară forța distribuită în lungul axei acesteia (q_t) este pozitivă (orientată în sensul axei x), derivata funcției $\frac{dN}{dx}$ va fi negativă și deci funcția (efortul N) va fi strict descrescătoare pe bara sau porțiunea de bară respectivă.
- dacă însă q_t este negativă (orientată în sens opus axei x) derivata funcției $N = N(x)$ va fi pozitivă astfel că funcția va fi strict crescătoare pe bara sau porțiunea de bară respectivă.
- acolo unde $q_t = 0$ vom avea $dN/dx = 0$ ceea ce înseamnă că tangenta geometrică la graficul N va fi paralelă cu axa de referință (forța axială constantă).

2° Interpretând similar ecuația (7.3) se deduce:

- dacă pe o bară sau porțiune de bară intensitatea sarcinii continue normale pe axa barei q_n este pozitivă (orientată de sus în jos) forța tăietoare pe bară sau porțiunea de bară respectivă va fi strict descrescătoare.
- dacă însă q_n pe o bară sau porțiune de bară este negativă (orientată de jos în sus), forța tăietoare T, pe bara sau porțiunea de bară respectivă va fi strict crescătoare.
- dacă q_n pe o bară sau porțiune de bară este zero, forța tăietoare T va fi constantă pe bara sau porțiunea de bară respectivă.

3° Ecuația (7.4) stabilește că derivata momentului încovoietor în raport cu x este egală cu forța tăietoare în secțiunea respectivă.

Având în vedere și în acest caz legătura dintre funcție și derivata sa deducem:

- dacă pe o bară sau porțiune de bară $T > 0$, momentul încovoietor, pe bara sau porțiunea de bară respectivă va fi strict crescător.
- dacă pe o bară sau porțiune de bară $T < 0$, momentul încovoietor pe bara sau porțiunea de bară respectivă este strict descrescător.

- în secţiunile în care T = 0 tangenta geometrică la curba M este paralelă cu axa de referinţă, în consecinţă momentul încovoietor din secţiune va prezenta un maxim sau un minim.

4° Interpretând ecuaţia diferenţială (7.5) deducem că funcţia T este cu un grad mai mare decât funcţia încărcării q_n iar momentul încovoietor M este cu un grad mai mare decât forţa tăietoare T şi cu două grade mai mare decât încărcarea q_n.

În consecinţă, dacă pe o bară sau porţiune de bară forţa $q_n = 0$ pe bara sau porţiunea de bară respectivă forţa T va fi constantă iar momentul M va prezenta o lege de variaţie liniară. O încărcare q_n = constant produce pe lungimea ei de acţiune forţa T liniară şi moment M reprezentat printr-o parabolă de gradul 2. Pentru q_n = liniar se obţine T-parabolă gradul 2 şi M-parabolă de gradul 3 ş.a.m.d.

Importanţa diagramelor de eforturi în activitatea specialistului arhitect este deosebită, permiţând cunoaşterea solicitării tuturor secţiunilor barei studiate, a secţiunilor ei cele mai solicitate (periculoase) oferind astfel imaginea solicitării complete a elementului de construcţie respectiv.

Cunoscând modul de calcul al eforturilor într-o secţiune (6.5) şi relaţiile diferenţiale dintre încărcări şi eforturi stabilite mai sus, trasarea diagramelor de eforturi devine evidentă, în succesiunea:

a. se determină reacţiunile din reazeme.

b. se calculează eforturile în secţiunile caracteristice ale barei. În sensul trasării diagramelor prin secţiuni caracteristice se vor înţelege:

- secţiunile de capăt ale barei;
- secţiunile de reazem;
- secţiunile de început şi sfârşit ale unei încărcări continue;
- secţiunile infinit vecine stânga şi infinit vecine dreapta punctului de aplicaţie al unei forţe concentrate (pentru eforturile N şi T) şi secţiunile infinit vecine stânga şi dreapta punctului de aplicaţie al unui cuplu pentru efortul moment M;
- secţiunile în care se anulează forţa tăietoare;
- secţiunile în care axa barei prezintă frânturi.

c. se adoptă o linie de referinţă paralelă cu axa barei, în raport cu care sunt reprezentate valorile eforturilor din secţiunile caracteristice menţionate la punctul "b" respectându-se următoarele reguli:

- ordonatele pozitive în diagramele N şi T vor fi reprezentate deasupra liniei de referinţă iar cele negative dedesubt.
- ordonatele pozitive în diagrama momentelor încovoietoare M se vor reprezenta sub linia de referinţă iar cele negative deasupra (diagrama M se construieşte pe fibra întinsă a barei).

d. se unesc punctele reprezentate grafic ca mai sus prin linii drepte sau curbe pe baza interpretării ecuaţiilor diferenţiale dintre eforturi şi încărcări, precizate mai sus.

Observaţii

1. Dacă între două secţiuni caracteristice consecutive încărcarea distribuită normală q_n este constantă, liniară sau orice altă funcţie de grad superior, momentul încovoietor M între cele două secţiuni va fi reprezentat printr-o parabolă astfel orientată încât o particulă ce s-ar deplasa în sensul forţei continue q ar fi captată în concavitatea curbei (fig. 7.3).

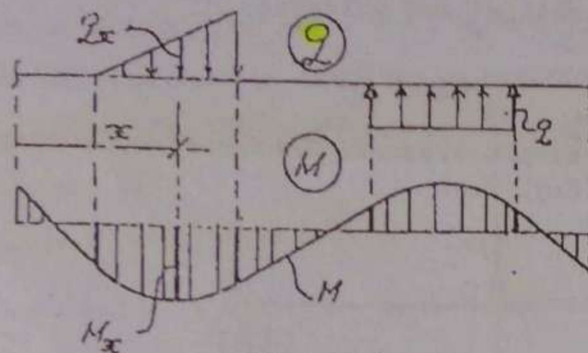


Fig. 7.3

2. Dacă încărcarea distribuită q_n între două secţiuni caracteristice consecutive este liniară sau de un grad superior, forţa tăietoare pe acest interval va fi reprezentată printr-o parabolă cu un grad mai mare, având concavitatea orientată după următoarele reguli:

- pentru q_n descrescătoare cu creşterea abscisei x, concavitatea curbei se stabileşte ca şi în cazul momentului încovoietor (fig. 7.4).
- pentru q_n crescătoare cu creşterea abscisei x, concavitatea este orientată opus (fig. 7.4,b).

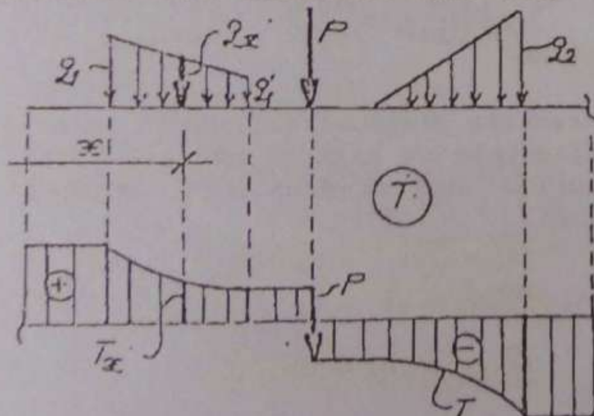


Fig. 7.4

7.3 DIAGRAME DE EFORTURI LA STRUCTURI STATIC DETERMINATE

În domeniul construcţiilor, structurile de rezistenţă alcătuite din bare sunt numeroase. Ele cuprind o gamă largă în care intră grinzile drepte, frânte sau curbe, arcele, cadrele, sistemele plane articulate, sistemele reticulare etc.

Anumite modalităţi de alcătuire şi anumite tipuri de încărcări (forţe) ce acţionează asupra lor definesc elemente de construcţie distincte, individualizate prin alura diagramelor şi valorile extreme ale eforturilor.

Din domeniul acestora, în continuare se vor trata câteva astfel de structuri acţionate de încărcări întâlnite frecvent în domeniul construcţiilor de orice tip.

Barele vor fi reprezentate prin axa lor longitudinală iar reacţiunile, eforturile secţionale şi diagramele lor, vor fi determinate conform celor prezentate în paragrafele anterioare.

7.3.1 Diagrame de eforturi la grinzi drepte static determinate

Grinzile drepte sunt structuri statice alcătuite din bare a căror axă este reprezentată printr-o linie dreaptă. Fixarea acestora în spaţiu este realizată printr-un număr de legături numeric egal cu cel al ecuaţiilor scalare de echilibru. În domeniul construcţiilor încărcările pe acestea sunt reprezentate prin forţe continue q, având diferite legi de variaţie, forţe concentrate P, cupluri distribuite m sau cupluri concentrate $\mathcal{M}$.

a) *Grinda simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită* (Fig. 7.5).

Încărcarea q se transmite în mod egal celor două reazeme astfel că: $V_A = V_B = \frac{q\ell}{2}$, $H_A = 0$ (toate forțele sunt normale pe axa barei).

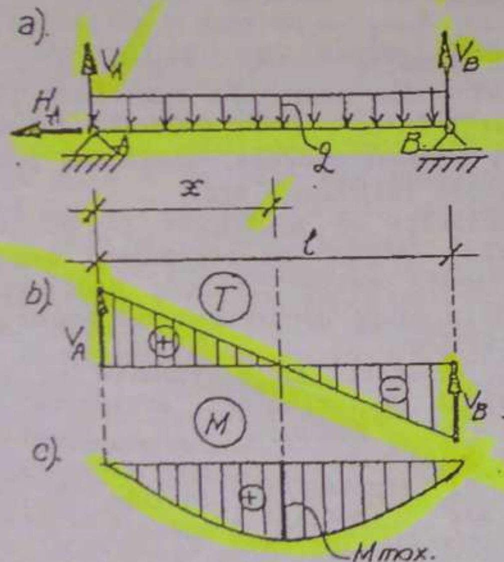


Fig. 7.5

Eforturile în secțiunile caracteristice au valorile:

$T_A^{dr} = V_A = \frac{q\ell}{2} = T_{max}$; $M_A = 0$;

$T_B^{st} = -V_B = -\frac{q\ell}{2}$; $M_B = 0$;

$T_x = T_A - qx = 0$; $x = \frac{T_A}{q} = \frac{\ell}{2}$

$M_{max} = V_A \cdot \frac{\ell}{2} - q\frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} = \frac{q\ell^2}{4} - \frac{q\ell^2}{8} = \frac{q\ell^2}{8}$;

Diagrama de forță tăietoare prezintă o variație liniară iar momentul încovoietor una parabolică. Momentul maxim apare la mijlocul deschiderii grinzii și are valoarea:

$$M_{max} = \frac{q\ell^2}{8} \tag{7.6}$$

b) *Grinda simplu rezemată încărcată cu o forță concentrată P* (fig. 7.6)

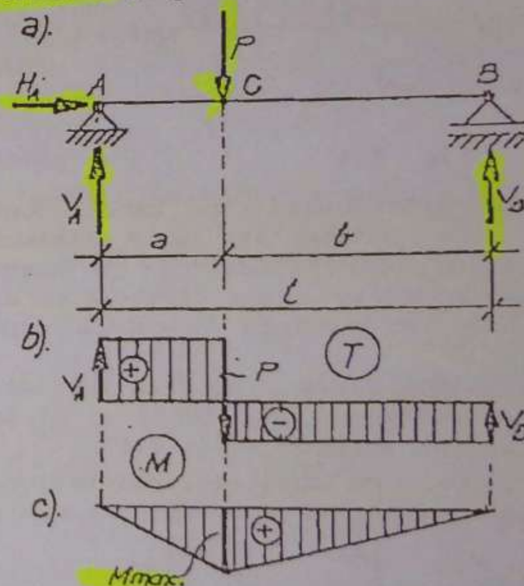


Fig. 7.6

Pentru trasarea diagramelor T și M se notează cu a și b distanțele ce fixează poziția forței pe grindă și apoi se exprimă echilibrul acesteia cu relațiile (5.2):

$$R_x = \sum F_{ix} = H_A = 0$$

$$\sum M_A = \ell V_B - aP = 0$$

$$\sum M_B = \ell V_A - bP = 0$$

din care se obţin $H_A=0$; $V_A = P\frac{b}{\ell}$; $V_B = P\frac{a}{\ell}$;

Valoarea eforturilor în secţiunile caracteristice:

$$T_A = V_A = T_C^{st}; \quad T_C^{dr} = T_C^{st} - P = -\frac{Pa}{\ell} = T_B^{st};$$

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_{max} = M_C = V_A \cdot a = P\frac{ab}{\ell} \qquad (7.7)$$

Diagramele T şi M sunt reprezentate în figurile 7.6,b şi 7.6,c.

Oricare ar fi poziţia forţei P, momentul maxim se obţine în dreptul acesteia şi are valoarea dată de relaţia (7.7).

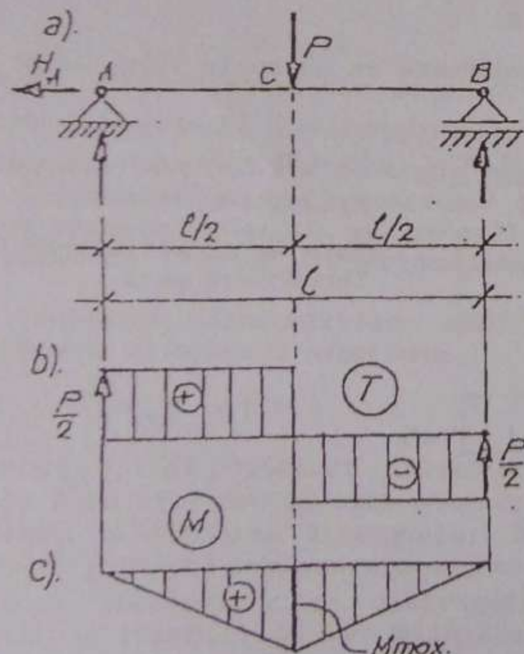


Fig. 7.7

Dacă $a=b=\frac{\ell}{2}$ forţa P se transmite în mod egal celor două reazeme astfel că $V_A=V_B=\frac{P}{2}$ iar momentul maxim are valoarea

$$M_{max} = \frac{P\ell}{4} \qquad (7.8)$$

Diagramele T şi M au alura şi valorile date în figura. 7.7.

c) *Grinda simplu rezemată încărcată cu un cuplu (fig. 7.8)*

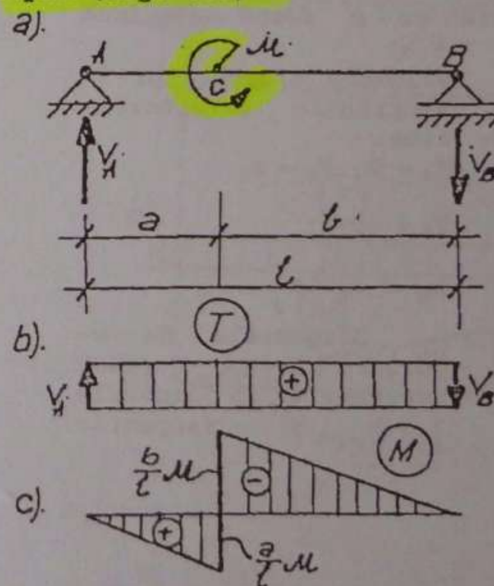


Fig. 7.8

Sub acţiunea încărcării $\mathcal{M}$ în reazemele A şi B iau naştere două forţe de reacţiune ce formează un cuplu de sens opus cuplului $\mathcal{M}$. Modulul acestora rezultă din condiţia de echivalenţă a celor două cupluri:

$$V_A \cdot \ell = V_B \cdot \ell = \mathcal{M}.$$

Se obţin astfel reacţiunile

$$V_A = V_B = \frac{\mathcal{M}}{\ell}.$$

Eforturile în secțiunile caracteristice au valorile:

$T_A = T_B = V_A$; $M_A = M_B = 0$; $M_C^{st} = V_A \cdot a = \mathcal{M}\frac{a}{\ell}$;

$M_C^{dr} = V_B \cdot b = \mathcal{M}\frac{b}{\ell}$.

Diagramele T și M sunt trasate în fig. 7.8, b și c.

7.3.2 Diagrame de eforturi pe console

În cazul consolelor determinarea eforturilor în secțiuni și trasarea diafragmelor acestora se poate face și fără determinarea prealabilă a reacțiunilor dacă se alege ca tronson înlăturat cel cuprins între secțiunea caracteristică și capătul liber al consolei.

a. *Consola încărcată cu o forță continuă uniform distribuită* (fig. 7.9,a)

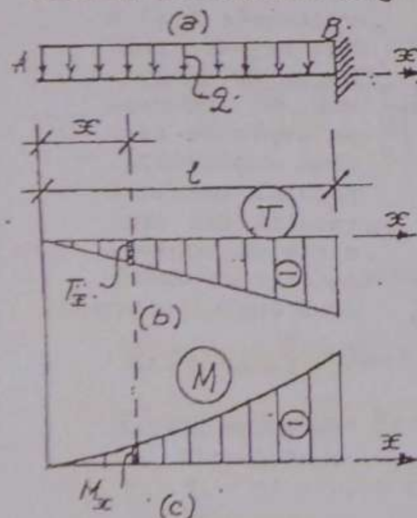


Fig. 7.9

Valoarea eforturilor în secțiunile caracteristice:

$T_A = 0$; $M_A = 0$;

$T_B = -q \cdot \ell$;

$M_B = -q \cdot \ell \frac{\ell}{2} = -q\frac{\ell^2}{2}$.

Diagramele de eforturi T și M sunt prezentate în figurile 7.9,b și respectiv 7.9,c.

b. *Consola încărcată cu o sarcină concentrată* (fig. 7.10,a)

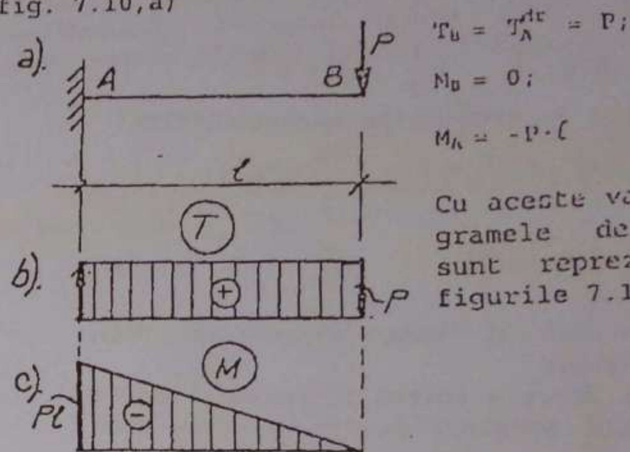


Fig. 7.10

$T_B = T_A^{dr} = P$;

$M_B = 0$;

$M_A = -P \cdot \ell$

Cu aceste valori, diagramele de eforturi sunt reprezentate în figurile 7.10, b și c.

c. *Consola încărcată cu un cuplu* (fig. 7.11)

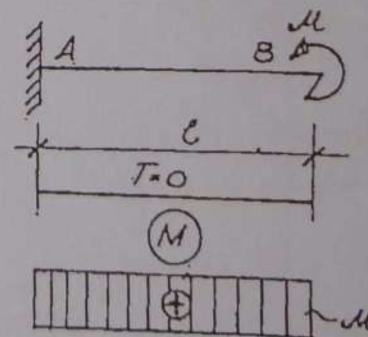


Fig. 7.11

$T_A = T_B = 0$;

$M_A = M_B = \mathcal{M}$.

Bara este solicitată la încovoiere pură.

7.3.3 Diagrame de eforturi pe grinzi simplu rezemate cu încărcări numai pe console

O bară petrecută cu continuitate peste unul sau ambele reazeme, (numite reazeme intermediare) formează o *grindă cu console* (fig. 7.12).

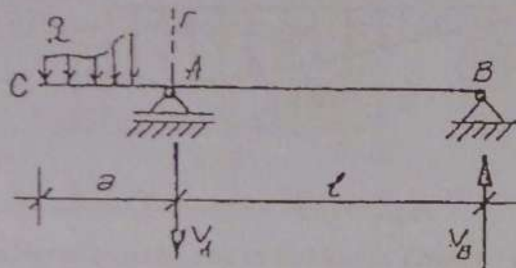


Fig.7.12

Distanța dintre reazemele A și B reprezintă deschiderea ℓ a grinzii iar lungimea a de trecere peste reazemele intermediare formează consola.

Fie M_r momentul maxim din reazemul A produs de forțele exterioare aplicate pe consolă, calculat direct, luând ca tronson înlăturat lungimea AC a consolei.

Sub acțiunea încărcărilor exterioare, în reazemul opus B va apare o reacțiune

$$V_B = |M_r|/\ell \qquad (7.9)$$

având sensul astfel orientat încât momentul ei calculat în A să aibă sensul opus momentului M_r.

Privitor la trasarea diaragmelor de eforturi aceste grinzi prezintă următoarele caracteristici:

- valoarea eforturilor și diafragmele lor pe console se tratează conform aliniatului 7.3.2;
- reacțiunea în reazemul opus celui intermediar se calculează direct cu relația (7.9);

- forța tăietoare între reazemele A și B este constantă și are intensitatea reacțiunii calculate cu relația (7.9);
- momentul încovoietor între reazemele A și B variază liniar de la valoarea M_r în reazemul intermediar la valoarea zero în reazemul opus.

a. ***Grinda simplu rezemată cu o consolă încărcată cu o sarcină uniform distribuită*** (Fig. 7.13,a).

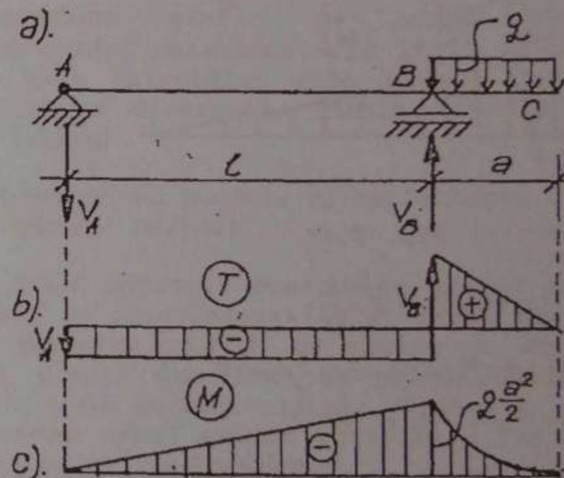


Fig. 7.13

$$|M_r| = q \cdot a\frac{a}{2} = \frac{qa^2}{2}$$

$$V_A = \frac{M_r}{\ell} = \frac{qa^2}{2\ell}$$

$$T_A^{dr} = q \cdot a; \; M_A = -M_r;$$

Diagramele T și M au alura și valorile din figurile 7.13.b și 7.13.c.

b. Grinda simplu rezemată cu o consolă încărcată cu o forță concentrată P (fig. 7.14).

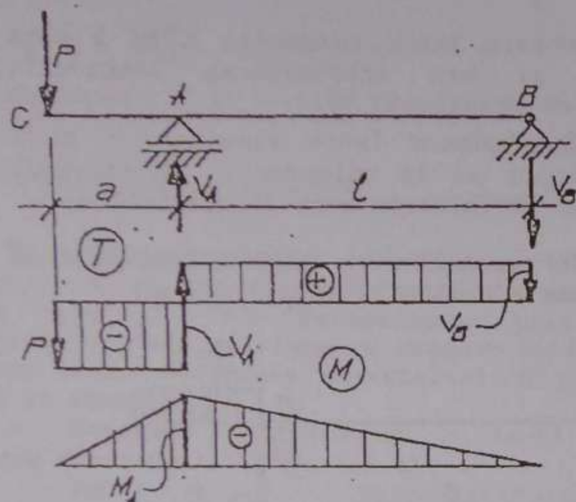


Fig. 7.14

$$|M_r| = P \cdot a; \; V_B = \frac{|M_r|}{\ell} = P \cdot \frac{a}{\ell};$$

$$T_C^{dr} = T_A^{st} = -P \; T_A^{dr} = V_B = P\frac{a}{\ell} = T_B^{st} \in$$

$$M_C = M_B = 0; \; M_A = -M_r = -Pa$$

Diagramele T și M sunt prezentate în figurile 17.14.b și 17.14.c.

c. *Grinda simplu rezemată cu o consolă încărcată cu un cuplu* $\mathcal{M}$ (fig. 7.15.a).

Procedând similar se obțin: $M_r = \mathcal{M}; \; V_A = \frac{\mathcal{M}}{\ell};$

$T_A = T_B^{st} = V_A; \; T_B^{dr} = 0; \; M_A = 0; \; M_B = M_C^{st} = \mathcal{M};$

În figurile 7.15.b și 7.15.c sunt trasate diagramele T și M.

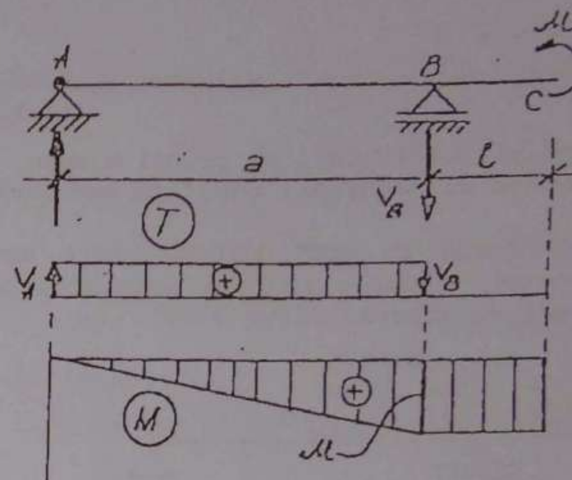


Fig. 7.15

Observație: Dacă sensul încărcărilor din exemplele de mai sus se inversează, eforturile T și M își vor schimba semnul.

7.3.4 Utilizarea principiului suprapunerii efectelor în trasarea diagramelor de eforturi

De cele mai multe ori încărcările pe grinzi sunt mult mai complexe, simultan asupra acestora acționând sarcini continue (cu diferite legi de variație), forțe concentrate P, cupluri distribuite m și concentrate $\mathcal{M}$.

Dacă o astfel de încărcare poate fi descompusă în mai multe încărcări simple (de tipul celor prezentate în paragrafele (7.3.1)...(7.3.3), la care se cunosc direct diagramele N, T, M) eforturile produse de încărcarea dată în fiecare secțiune vor reprezenta suma eforturilor produse de încărcările simple componente considerate acționând separat. Utilizând acest principiu, numit al suprapunerii

efectelor sau al independenţei acţiunii forţelor în anumite cazuri de încărcări şi structuri diagramele de eforturi se pot obţine simplu şi eficient cumulând ordonatele diagramelor date de încărcările simple componente ale încărcării totale. Pentru exemplificare vom considera grinda simplu rezemată din figură (7.16) încărcată cu forţele q şi $P=10q\ell$.

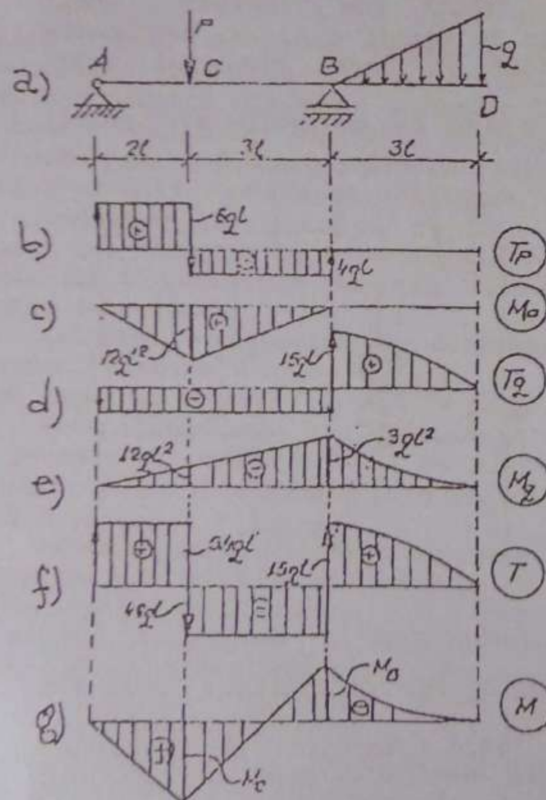


Fig. 7.16

Considerând grinda încărcată numai cu forţa P, se trasează direct diagramele T_P şi M_P (fig. 7.16, b şi c). Luând apoi aceeaşi grindă, încărcată cu

forţa q se obţin, tot direct, diagramele T_q şi M_q (vezi aliniatul 7.3.3).

Conform principiului suprapunerii efectelor în fiecare secţiune a barei vom avea: $T=T_P+T_q$; $M=M_P+M_q$.

Aplicând aceste relaţii secţiunilor caracteristice ale barei rezultă:

$T_A= T_C^{st} = 6q\ell-0,6q\ell = 5,4q\ell$; $T_C^{dr}=-4q\ell-0,6q\ell=-4,6q\ell= T_B^{st}$;

$T_B^{dr} = 1,5q\ell$; $M_C=12q\ell^2-1,2q\ell^2= 10,8q\ell^2$; $M_B= 3q\ell^2+ 0 = 3q\ell^2$.

Reprezentând grafic şi unind valorile eforturilor astfel determinate cu linii drepte sau curbe, pe baza relaţiilor diferenţiale ale barei drepte se obţin diagramele finale T şi M (fig. 7.16,f şi 7.16,g).

7.3.5 Grinzi cu console şi articulaţii (grinzi Gerber)

Dacă între capetele consolelor a două sau mai multe grinzi se intercalează bare fixate articulat sau prin rezemare simplă se obţine o structură statică ce poartă denumirea de *grindă Gerber* sau grindă cu console şi articulaţii. Grinzile cu console se numesc uzual *grinzi principale* iar barele intercalate *grinzi independente*.

În fig. 7.17' sunt arătate câteva structuri de acest tip, grinzile principale fiind A-B şi C-D iar cele independente E-F şi I-J.

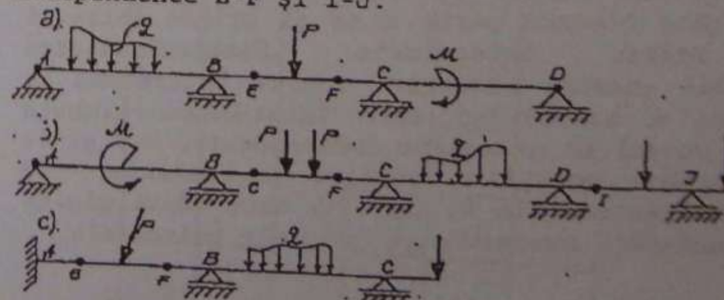


Fig. 7.17

Se observă ușor că încărcările aplicate grinzilor principale nu produc eforturi în grinzile independente în schimb, forțele acționând asupra acestora influențează eforturile din grinzile principale pe care reazemă.

Pentru determinarea reacțiunilor din legături (reazeme), a eforturilor în diferite secțiuni și pentru trasarea diagramelor de eforturi, grinzile Gerber se consideră a fi sisteme de corpuri rigide. Aplicându-le metoda separării corpurilor, acestea (fig. 7.18,a) se împart într-o serie de grinzi independente (fig. 7.18,b) și grinzi principale (fig. 7.18,c), legăturile articulate dintre ele E, F, I și J înlocuindu-se prin perechi de forțe (de legătură) egale și direct opuse.

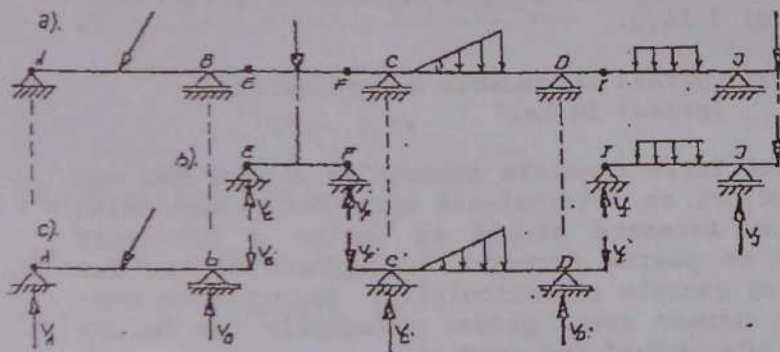


Fig. 7.18

O grindă Gerber se zice static determinată atunci când fiecare parte a sa și grinda întreagă sunt static determinate. Particularitatea rezolvării acestor structuri constă în ordinea de efectuare a calculului care întotdeauna trebuie început cu cel al grinzilor independente, E-F și I-J. Utilizând ecuațiile scalare de echilibru se determină reacțiunile V_E (H_e), V_I care odată găsite devin încărcări cunoscute pe grinzile principale.

Toate calculele și trasarea diagramelor de eforturi se face apoi cu totul identic metodologiei utilizate în calculul grinzilor drepte (vezi exemplul 7.5.3).

7.3.6 Cadre plane static determinate

Cadrele sunt structuri statice indeformabile alcătuite dintr-o serie de bare ale căror axe formează o linie frântă sau ramificată. După poziția în plan sau în spații a liniei menționate cadrele se clasifică în *cadre plane* și *cadre spațiale*.

Intersecțiile a două sau mai multe bare poartă denumirea de noduri.

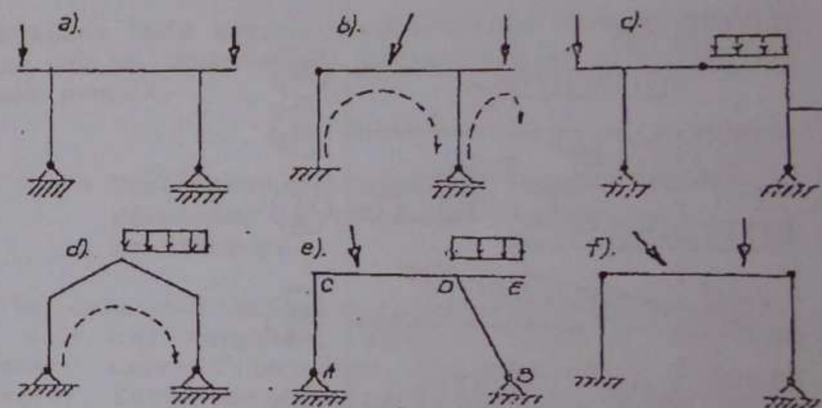


Fig. 7.19

Ele pot fi rigide sau articulații, fixe sau deplasabile.

Cadrele la care forțele de legătură (reacțiunile) se pot determina numai cu ajutorul ecuațiilor scalare de echilibru se numesc static determinate.

În fig. 7.19,a, d şi e sunt prezentate 3 tipuri de cadre, cu noduri rigide, static determinate.

În reazemele acestora apar 3 forţe de legătură; dispunând în plan de 3 ecuaţii de echilibru static, reacţiunile se vor determina numai cu ajutorul acestora.

În figura 7.19 b, c şi f sunt prezentate câteva tipuri de cadre având în noduri sau pe deschiderea unei bare câte o articulaţie. Prezenţa acestora permite divizarea cadrelor în două părţi, în baza principiului separării corpurilor.

Cum pentru fiecare parte de cadru se pot scrie câte 3 ecuaţii scalare de echilibru, numărul total al ecuaţiilor exprimate va fi de 2 × 3 = 6. La rândul lor, forţele de legătură din reazeme sunt în număr de 6 astfel că acestea formează structuri static determinate.

Calculul eforturilor în diferite secţiuni şi trasarea diagramelor acestora la un cadru se face după regulile generale stabilite la grinda dreaptă.

Pentru aplicarea lor corectă se alege un *sens de parcurs* al cadrului, care se marchează sub bare printr-o linie întreruptă şi o săgeată (fig. 7.19, b şi 7.19 d).

Imaginându-ne că am separa un nod de cadru (spre exemplu nodul D al cadrului din fig. 7.19,e) prin secţionarea barelor ce concură în el, eforturile secţionale din aceste bare trebuie să formeze sisteme în echilibru atât la translaţii cât şi la rotiri, nodurile fiind în echilibru. Raportând nodul considerat la un sistem cartezian de axe xOz (fig. 7.20.a) condiţia de echilibru se va exprima prin relaţiile:

$$R_x = \sum_{i=1}^{k} (N_{ix}+T_{ix}) = 0;\ R_z = \sum_{i=1}^{k} (N_{iz} + T_{iz}) = 0;\ \sum_{i=1}^{k} M_i = 0$$

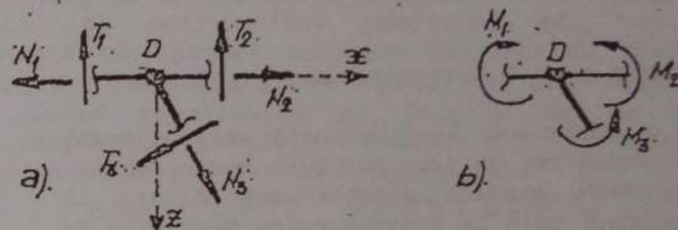


Fig. 7.20

în care N_{ix}, N_{iz}, T_{ix} şi T_{iz} sunt proiecţiile eforturilor N_i şi T_i după axa x şi z, din toate barele concurente în nod iar $\sum M_i$ reprezintă suma momentelor din aceleaşi bare şi în aceleaşi secţiuni (fig. 7.20,b).

Pe lângă cadrele static determinate, în practica construcţiilor este utilizată o mare varietate de cadre static nedeterminate mono sau multietajate (fig. 7.21).

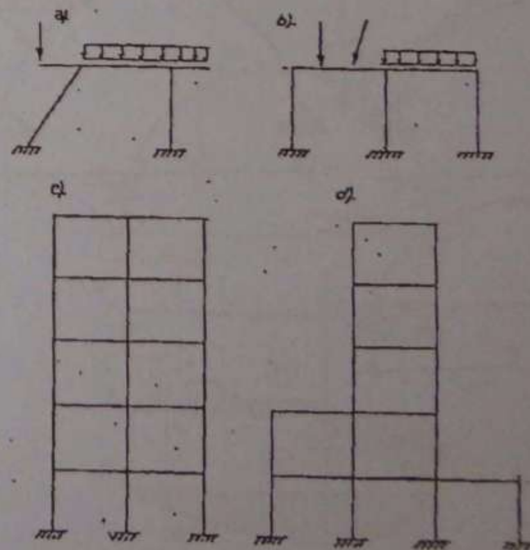


Fig. 7.21

Reacţiunile şi eforturile din barele unei astfel de structuri se determină manual sau automat, cu ajutorul calculatoarelor electronice utilizând în acest scop metode specifice structurilor static nedeterminate.

7.3.7 Arce static determinate

Barele a căror axă longitudinală este o curbă plană poartă denumirea de arce sau bare curbe. Pentru a forma structuri statice acestea sunt fixate la capete cu legături care le suprimă orice deplasare de corp liber. Dacă forţele de legătură din aceste reazeme pot fi determinate numai cu ajutorul ecuaţiilor scalare de echilibru arcele se numesc static determinate. Din categoria acestora fac parte:

- arcele simplu rezemate (fig. 7.22,a).
- arcele cu trei articulaţii (fig. 7.22,b).
- arcele cu tirant cu două articulaţii şi un reazem simplu (fig. 7.22,c).

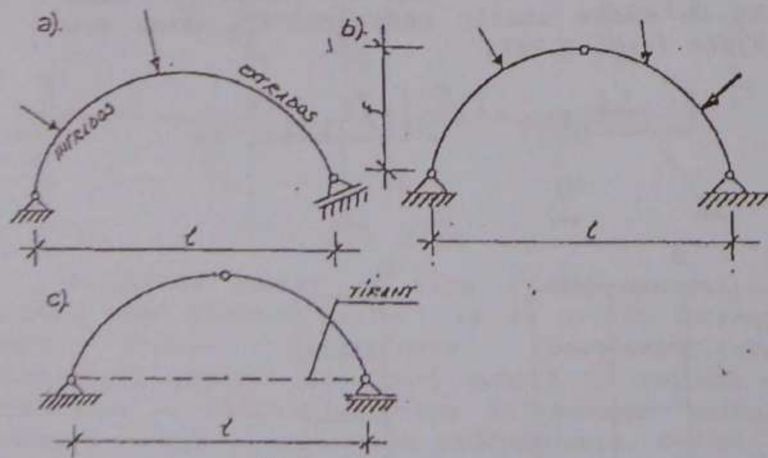


Fig. 7.22

Dintre acestea în practica structurilor sunt folosite numai arcele cu trei articulaţii şi cele cu tirant. Cele simplu rezemate prezintă doar interes teoretic, servind ca sisteme de bază în calculul arcelor static nedeterminate.

Capetele arcelor din reazeme poartă denumirea de *naşteri* iar punctul de pe curbă, cel mai îndepărtat de linia naşterilor se numeşte *cheia arcului*.

Distanţa f de la cheie la linia naşterilor se numeşte *săgeată* iar distanţa pe orizontală dintre naşteri *deschiderea arcului* notată cu ℓ.

Raportul f/ℓ dintre săgeată şi deschidere poartă numele de *pleoştirea arcului*. În domeniul construcţiilor arcele sunt întâlnite frecvent, ca elemente de rezistenţă sau arhitectură, faţa lor convexă purtând denumirea de *extrados* iar cea concavă de *intradosul* arcului.

Formele geometrice mai mult utilizate sunt acelea de arce de cerc şi arce de parabolă, de regulă cu linia naşterilor orizontală.

Există şi arce cu linia naşterilor înclinată faţă de orizontală, în special în alcătuirea structurilor de poduri sau pasarele de trecere.

Caracteristica destinctivă a arcelor este aceea că sub acţiunea oricărui sistem de forţe, chiar numai verticale, reacţiunile din reazeme au componente orizontale numite *împingeri* motiv pentru care ele poartă denumirea de structuri cu împingeri laterale. O altă particularitate priveşte încărcările exterioare care sub formă de forţe sau sisteme de forţe, sunt aplicate în planul arcelor, pe extradosul acestora.

Din acţiunea forţelor în secţiunile unui arc iau naştere totdeauna eforturi axiale N, forţe tăietoare T şi momente încovoietoare M, având aceleaşi semnificaţii ca şi în cazul structurilor alcătuite din bare drepte.

Pentru determinarea acestora se calculează în prealabil reacțiunile din reazeme (fig. 7.23).

Cele verticale (V_A și V_B) se obțin identic ca la o grindă dreaptă (AB) de aceeași deschidere ℓ și cu aceleași încărcări, din ecuații de moment nul în raport cu cele două reazeme.

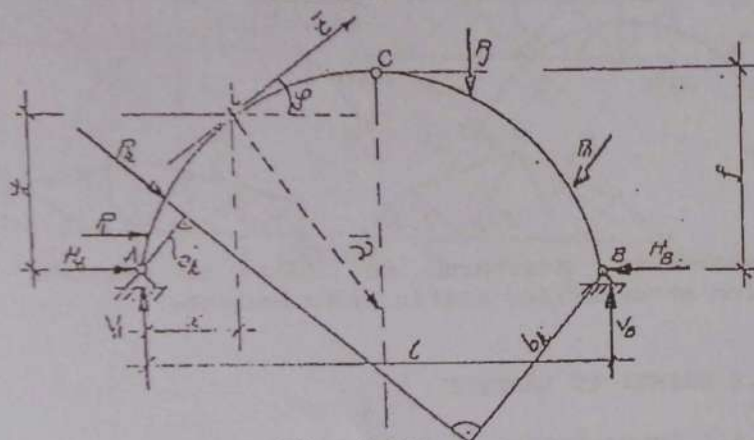


Fig. 7.23

Notând cu a_k și b_k brațele forței P_k ($k=1, 2,\dots,n$) față de reazemele A și B vom avea: $\sum M_B = V_A\ell - \sum P_k \cdot b_k = 0$; $\sum M_A = V_B\ell - \sum P_k a_k = 0$, din care

$$V_A = \frac{\sum P_k}{\ell} b_k; \quad V_B = \frac{\sum P_k}{\ell} a_k \tag{7.10}$$

Pentru determinarea împingerilor orizontale H_A și H_B se exprimă succesiv echilibrul părților de arc CA și CB prin două ecuații de moment nul în raport cu articulația C. Expresiile acestora au forma:

$\sum M_C(P_{\widehat{CA}}) = H_A \cdot f - \sum M_C(P_{\widehat{CA}}) = 0$; $\sum M_C(P_{\widehat{CB}}) = H_B \cdot f - \sum M_C(P_{\widehat{CB}}) = 0$

și conduc la soluțiile:

$$H_A = \frac{1}{f}\sum M_C\left(P_{\widehat{CA}}\right); \quad H_B = \frac{1}{f}\sum M_C\left(P_{\widehat{CB}}\right) \tag{7.11}$$

în care $\sum M_C\left(P_{\widehat{CA}}\right)$ și $\sum M_C\left(P_{\widehat{CB}}\right)$ reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de pe arcele CA și respectiv CB calculate în punctul C. Din modul de calcul al reacțiunilor prezentat mai sus se constată că mărimea acestora depinde de poziția celor 3 articulații și nu depinde de forma arcului.

Având reacțiunile și forțele de pe arc, eforturile într-o secțiune curentă i (fig. 7.23) de coordonate (x,y), vor avea expresiile:

$$\begin{aligned} N_i &= -H_A\cos\varphi - V_A\sin\varphi + \sum pr/t\,P_{st} \\ T_i &= -H_A\sin\varphi + V_A\cos\varphi - \sum pr/\nu\,P_{st} \\ M_i &= V_A\cdot x - H_A\cdot y - \sum M(P_{st}) \end{aligned} \tag{7.12}$$

în care sumele $\sum$ cuprind proiecțiile după tangenta $\bar{t}$ și normala $\bar{\nu}$ în secțiunea i a tuturor forțelor exterioare P situate în stânga secțiunii considerate, iar M_i momentul acelorași forțe în raport cu centrul de greutate al secțiunii i.

Dacă forțele exterioare P_i sunt verticale, (fig. 7.24), componentele orizontale ale reacțiunilor din articulații devin egale și de sensuri contrare.

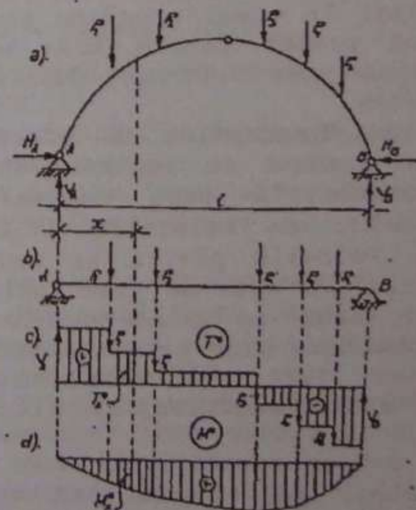


Fig. 7.24

Expresiile acestora şi a celor verticale se obţine cu relaţii mai simple, obţinute în acelaşi mod. Odată acestea cunoscute, eforturile într-o secţiune curentă vor avea forma:

$$N_x=\left(-V_A+\sum P^{st}\right)\sin\varphi-H\cos\varphi=-T_x^o\sin\varphi-H\cos\varphi$$

$$T_x=\left(V_A-\sum P^{st}\right)\cos\varphi-H\sin\varphi=T_x^o\cos\varphi-H\sin\varphi \qquad (7.13)$$

$$M_x = V_A\cdot x-H\cdot y-\sum M_{st}\left(P_{st}\right)=M_x^o-H\cdot y$$

în care $T_x^o > M_x^o$ sunt eforturile ce iau naştere pe o grindă simplu rezemată (fig. 7.24,b) cu aceeaşi deschidere ℓ şi încărcată cu acelaşi sistem de forţe (*grinda echivalentă a arcului*).

Dacă în fiecare secţiune a arcului $M_x^o = H\cdot y$, momentul încovoietor $M_x = 0$, în consecinţă în secţiunile acestuia nu va apare solicitarea de încovoiere.

Un astfel de arc poartă denumirea de *arc de coincidenţă*.

Forma acestuia prezintă o importantă practică deosebită, în special în cazul anumitor tipuri de materiale care pot prelua foarte bine eforturi axiale de compresiune dar lucrează deficitar la eforturi de încovoiere.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se împarte arcul într-o serie de segmente (bolţari) prin secţiuni normale în care se calculează eforturile secţionale, cu relaţiile (7.12) sau (7.13), după caz. Valorile găsite se reprezintă grafic pe axa arcului şi apoi se unesc prin linii drepte sau curbe în raport de natura încărcării.

Pe lângă tipurile de arce static determinate, arătate în figura 7.22, în construcţii se utilizează şi arce static nedeterminate (fig. 7.25)

la care reacţiunile din reazeme nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru static.

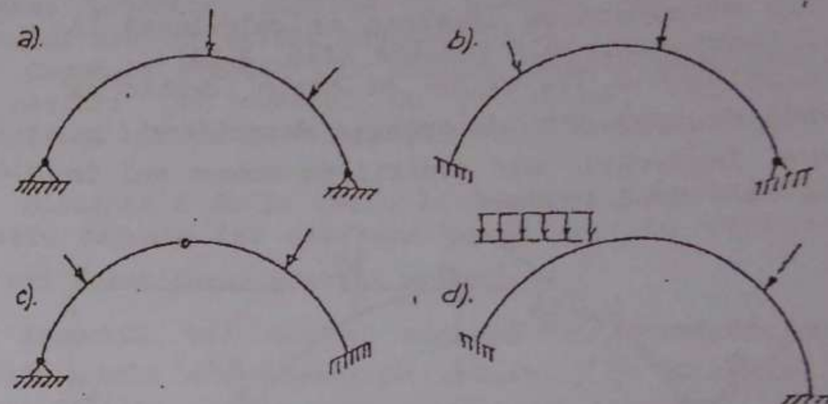


Fig. 7.25

Rezolvarea acestora se face cu metode specifice structurilor static nedeterminate.

7.4 GRINZI CU ZĂBRELE

7.4.1 Generalităţi şi definiţii

Grinzile cu zăbrele sunt structuri compuse alcătuite din bare articulate la ambele capete într-o configuraţie geometric indeformabilă. În domeniul construcţiilor sunt întâlnite într-o mare varietate de forme, fiind destinate acoperirii unor deschideri mari pentru care grinzile obişnuite devin improprii.

În fig. 7.26 sunt prezentate câteva tipuri uzuale: grinda de formă triunghiulară, cea cu tălpi paralele, grinda trapezoidală şi cea de formă poligonală. Barele componente ale unei astfel de structuri poartă denumiri specifice: tălpi (talpa

inferioară T_i şi talpa superioară T_s), montanţi (M) şi diagonale (D).

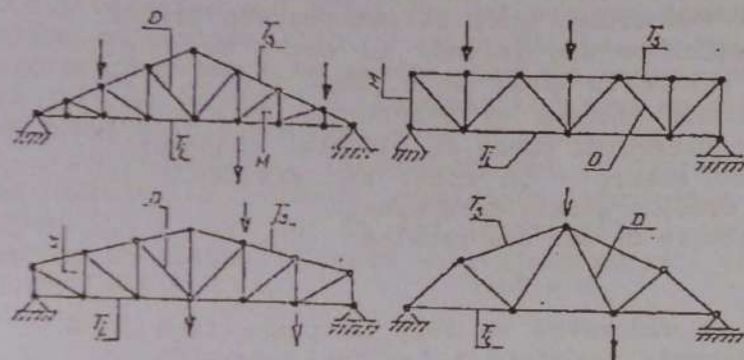


Fig. 7.26

Articulaţiile de la intersecţia barelor se numesc *noduri*.

O grindă cu zăbrele se zice geometric invariabilă atunci când poziţia fiecărui nod este invariabilă în raport cu toate celelalte noduri.

Considerând două noduri 1 şi 2 pentru ca poziţia unuia în raport cu celălalt să fie invariabilă este suficient ca ele să fie legate cu o bară 1 - 2 nedeformabilă (fig. 7.27,a).

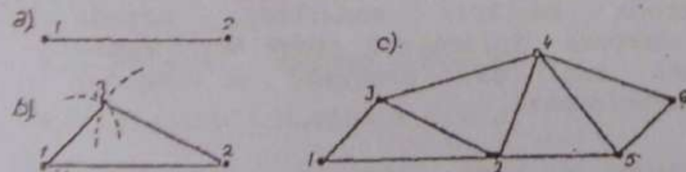


Fig. 7.27

Pentru ca un al 3-lea nod să aibă şi el o poziţie invariabilă faţă de primele două, este necesar ca acesta să fie legat de ele prin două bare 1-3 şi 2-3 (fig. 7.27,b).

El nu poate ocupa în acest caz decât o singură poziţie 3, situată la intersecţia arcelor de cerc duse din 1 şi 2 cu razele 1-3 şi 2-3.

Figura 1-2-3 fiind un triunghi rezultă că triunghiul este cea mai simplă figură geometrică indeformabilă.

Se observă că orice alt nod 4, 5, 6, ... ş.a.m.d pentru a fi legat invariabil de precedentele necesită câte două bare 4-3 şi 4-2; 5-4 şi 5-2...ş.a.m.d.

Pentru a fi indeformabilă geometric, o grindă cu *n* noduri va trebui deci să conţină:

- 1 bară pentru legarea primelor două noduri.
- 2(n-2) bare pentru legarea restului de (n-2) noduri.

Prin urmare, totalul barelor ce pot asigura condiţia de indeformabilitate va fi:

$$b = 1 + 2(n-2) = 2n - 3 \quad (7.14)$$

Relaţia (7.14) exprimă condiţia necesară dar nu şi suficientă.

Pentru ca structura plană articulată să fie indeformabilă este necesar ca numărul de bare *b* să fie astfel distribuite încât să nu existe părţi ale grinzii cu bare insuficiente şi altele cu bare excedentare.

Cum triunghiul îndeplineşte întotdeauna condiţia de indeformabilitate rezultă că o grindă cu zăbrele formată numai din triunghiuri alăturate este totdeauna indeformabilă.

Dacă b>2n-3 grinda este indeformabilă dar are şi bare suplimentare; dacă însă b<2n-3 legăturile dintre noduri sunt insuficiente pentru ca acestea să ocupe o poziţie invariabilă conducând la o structură *labilă*.

Modelarea sistemelor plane articulate în vederea determinării eforturilor din bare se face pe baza următoarelor ipoteze simplificatoare de calcul:

- grinda şi forţele ce acţionează asupra ei se consideră în acelaşi plan (motiv pentru care aceste structuri se mai numesc şi structuri plane articulate);
- forţele exterioare sunt aplicate concentrat numai în noduri;
- nodurile sunt articulaţii perfecte astfel că la capetele barelor nu pot exista momente;
- toate barele sunt drepte.

În baza acestor ipoteze, o bară oarecare a grinzii cuprinsă între nodurile 1 şi 2 va fi solicitată numai la capete de forţele exterioare concentrate efectiv aplicate sau de legătură (reacţiuni) şi de forţele care iau naştere în celelalte bare concurente în nod (fig. 7.28).

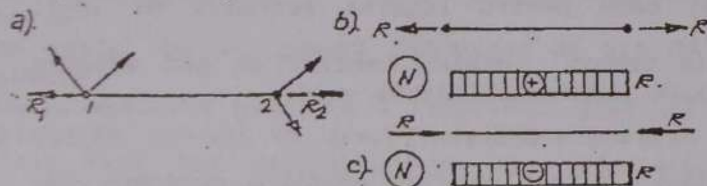


Fig. 7.28

Fie R_1 şi R_2 proiecţia după axa barei 1-2 a forţelor menţionate din noduri (fig. 7.28.a).

Cum orice bară a unei grinzi se află în echilibru rezultă că cele două rezultante sunt todeauna egale ($R_1 = R_2 = R$) şi direct opuse astfel că bara respectivă nu poate fi decât ori *întinsă* ($R_1 = R_2 = R$ trag de nod - fig. 7.28,b) ori *comprimată* ($R_1 = R_2 = R$ intră în nod - fig. 7.28,c).

Aşa cum reiese din figurile (7.28,b şi c)

forţele rezultante R reprezintă chiar efortul axial din bară care împreună cu forţele exterioare efectiv aplicate în nod formează un *sistem de forţe coplanare concurente în echilibru*.

Cum echilibrul acestora se exprimă prin două ecuaţii scalare de echilibru, rezultă că pentru o grindă cu n noduri se vor putea scrie 2n ecuaţii.

Atunci când forţele exterioare aplicate în noduri sunt cunoscute, apar ca necunoscute pentru grindă reacţiunile din reazeme în număr de r şi eforturile axiale în număr de b. Dacă $r + b = 2n$ reacţiunile din reazeme şi eforturile axiale din bare se pot determina numai cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru static - în acest caz structura cu zăbrele se numeşte static determinată.

Din relaţia de mai sus rezultă:

$$b = 2n - r \tag{7.15}$$

Având în vedere că un corp se poate fixa în plan cu un număr de minim 3 legături, rezultă că $r=3$, cu care ecuaţia (7.15) devine: $b = 2n-3$

În consecinţă, condiţia ce exprima determinarea statică la structurile cu zăbrele simplu rezemate sau încastrate la un capăt se exprimă prin aceeaşi relaţie cu condiţia de indeformabilitate geometrică (relaţia 7.14).

Dacă $r>3$ grinda este static nedeterminată exterior, iar edacă $b>2n-3$ nedeterminarea acesteia este interioară.

Calculul static al structurilor plane articulate are ca obiect determinarea naturii eforturilor din bare (întindere sau compresiune) şi a intensităţii acestora. În acest scop se utilizează metode clasice specifice, analitice şi grafice: metoda izolării nodurilor, metoda secţiunilor, metoda înlocuirii barelor, epura Mexwell-Cremona etc. sau programe de calcul automat, la calculatoare.

7.4.2 Metoda izolării nodurilor

Conform ipotezelor prezentate în paragraful 7.4.1 în orice nod i ($i=1, 2...n$) al unei structuri plane articulate (fig. 7.29,a) eforturile N_{ij} din barele concurente în acesta, forțele exterioare P_i și cele de legătură R_i formează todeauna un sistem de forțe concurente coplanare în echilibru.

În consecință, izolând un nod și introducând pe direcțiile barelor secționate eforturile N_{ij} ($j=m, k, l, n$) iar în nod încărcările P_i se va obține un sistem de forțe echivalent cu zero (fig. 7.29,b).

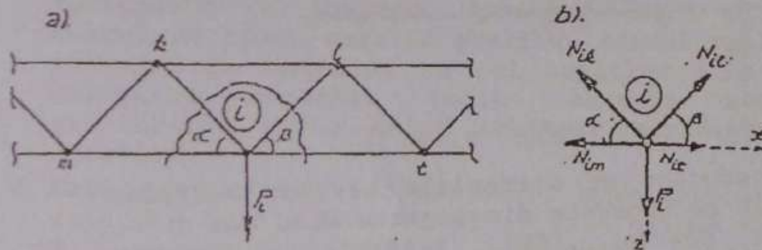


Fig. 7.29

Pentru exprimarea echilibrului acestuia se alege un sistem ortogonal de axe ix și iz în raport de care se exprimă ecuațiile scalare de echilibru (2.11) privitoare la forțele concurente coplanare. Referindu-ne la nodul i din figura (7.29,b) vom avea:

$$R_x = N_{in} - N_{im} - N_{ik}\cos\alpha + N_{il}\cos\beta = 0$$

$$R_z = -N_{ik}\sin\alpha - N_{il}\sin\beta + P_i = 0.$$

Izolând succesiv toate cele n noduri ale structurii și exprimând echilibrul fiecăruia prin câte două ecuații de echilibru se obține pentru întreaga structură un sistem de 2n ecuații algebrice

având [illegible] necunoscute reacțiunile R_i din reazeme și eforturile din bare. Rezolvând sistemul de ecuații menționat se obțin necunoscutele căutate.

Pentru optimizarea calculului, aplicarea metodei se va face în următoarea succesiune:

- se determină reacțiunile din reazeme, exprimând echilibrul general al întregii grinzi considerate ca un solid rigid. În acest scop se utilizează relațiile (2.20) sau (5.2) la alegere.
- se izolează succesiv toate nodurile secționând barele concurente în ele și se introduc pe direcțiile lor eforturile necunoscute. Sensul acestora se introduce arbitrar. Alegând un sistem de referință ortogonal cu originea în nod se exprimă apoi condiția de echilibru a sistemului de forțe concurente coplanare din nodul izolat. Se recomandă a se porni de la un nod care să aibă maximum două bare de efort necunoscut.

Procedând în acest fel se pot obține în fiecare nod maximum două ecuații cu două necunoscute care se rezolvă ușor.

Soluțiile acestora definesc atât modulul cât și natura fiecărui efort (întindere sau compresiune).

Observații

- Dacă din calcul un efort rezultă pozitiv sensul arbitrar ales pentru acesta coincide cu sensul lui real; soluțiile negative definesc sensuri ale eforturilor opuse celor arbitrar atribuite acestora.
- având reacțiunile calculate din exprimarea echilibrului global al structurii la izolarea ultimelor două noduri, eforturile din 3 bare vor fi cunoscute din izolarea nodurilor anterioare. Verificarea echilibrului acestora constituie cheia de control a corectitudinii rezultatelor.

- metoda izolării nodurilor este utilizată atunci când se urmăreşte cunoaşterea eforturilor din toate barele structurii.

7.4.3 Metoda secţiunilor

Metoda izolării nodurilor prezintă inconvenientul că o eroare de calcul comisă într-un nod este transmisă în toate celelalte noduri.

De asemenea, pentru a găsi eforturile numai în anumite bare ale structurii este necesar a fi parcurse toate nodurile pînă la acelea în care concură barele respective.

Un procedeu deosebit de expeditiv, care elimină neajunsurile menţionate mai sus, este dat de aşa-numita *metoda secţiunilor* bazată pe principiul echilibrului părţilor, cunoscut din studiul sistemelor de corpuri.

Secţionând structura cu zăbrele (fig. 7.30,a) şi introducând pe direcţia barelor secţionate eforturile din acestea (fig. 7.30,b), fiecare tronson rezultat va trebui să fie în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare, a celor de legătură şi a eforturilor exteriorizate.

Deoarece în plan echilibrul unui sistem de forţe se exprimă prin 3 ecuaţii scalare de echilibru, secţiunea efectuată nu trebuie să taie mai mult de 3 bare de efort necunoscut. Varianta analitică a metodei este cunoscută sub denumirea de *metoda Ritter*. Conform acesteia, determinarea eforturilor din barele secţionate se face exprimând echilibrul oricărui tronson prin două ecuaţii de moment nul în raport cu punctele de intersecţie a două eforturi necunoscute (numite puncte Ritter) şi printr-o ecuaţie de proiecţie nulă. Se obţin astfel numai ecuaţii cu o singură necunoscută uşor de rezolvat. Urmărind determinarea eforturilor din barele 5-7, 5-6 şi 4-6 ale grinzii din fig. (7.30) aceasta a fost secţionată în aşa fel încât să fie tăiate barele de eforturi căutate şi a fost reţinut numai un *tronson*, cel din stânga secţiunii.

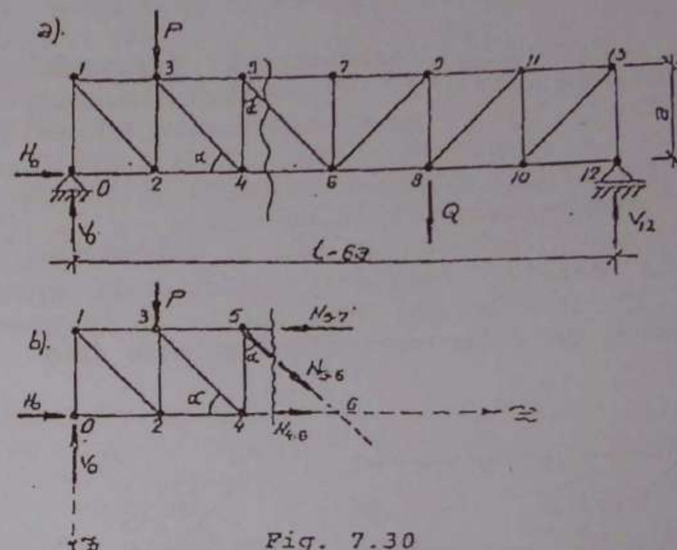


Fig. 7.30

Introducând pe direcţiile barelor secţionate eforturile necunoscute din acestea N_{5-7}, N_{4-6} şi N_{5-6}, tronsonul păstrat (fig. 7.30,b) sub acţiunea acestora şi a forţelor ce-i sunt aplicate direct (V_0, H_0 şi P) va trebui să se afle în echilibru. Exprimarea acestei condiţii se face prin ecuaţiile de moment nul în nodurile 5 şi 6 (de intersecţie a câte două eforturi necunoscute) şi printr-o ecuaţie proiecţie nulă pe orizontală sau verticală.
Vom avea:

$$M_5 = a \cdot N_{4-7} + aP - 2a \cdot V_0 = 0;$$
$$M_6 = a \cdot N_{5-7} + 2aP - 3a \cdot V_0 = 0$$
$$R_y = N_{5-6}\cos\alpha + P - V_0 = 0$$

S-a obţinut astfel un sistem de ecuaţii, fiecare din ele cu câte o necunoscută având

soluțiile: $N_{4-6}=2V_0 - P$; $N_{5-7}=3V_0-2P$ și $N_{5-6}=(V_0-P)/\cos\alpha$.

Observații

- forțele aplicate direct pe oricare din tronsoanele rezultate prin secționare cuprind forțe exterioare efectiv aplicate în noduri și forțe de legătură (reacțiune). Determinarea acestora se face printr-un calcul prealabil exprimând echilibrul structurii date (fig. 7.30.a) considerate ca un solid rigid. Pentru aceasta se pot folosi relațiile (2.20), (5.2) sau (5.3).
- sensurile eforturilor necunoscute din barele secționate se introduc arbitrar. Dacă din calcul un efort rezultă pozitiv, sensul real al acestuia coincide cu cel arbitrar ales. Soluțiile negative indică sensuri ale eforturilor opuse celor arbitrar atribuite acestora.
- dacă s-ar căuta alte eforturi, spre exemplu cele din barele 9-11, 8-11 și 8-10 grinda ar fi secționată similar, secționând barele menționate și apoi s-ar proceda în același mod folosit la calculul eforturilor din barele 5-7, 4-6 și 5-8 arătat mai sus.

7.5 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 7.5.1

Să se traseze diagramele de eforturi N, T și M pe grinda din figura 7.31,a. Se dau $\alpha=60^\circ$, $q=20kN/m$, $P=50kN$.

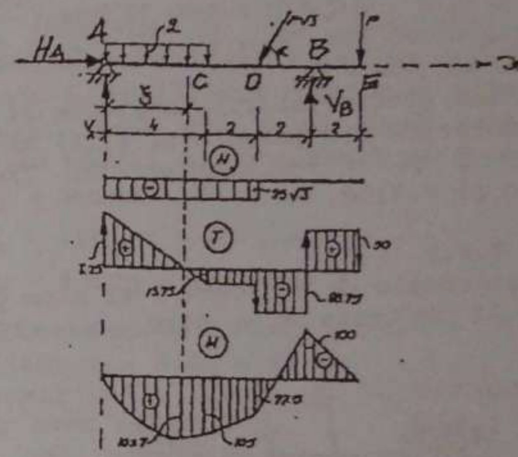


Fig. 7.31

Rezolvare:

- calculul reacțiunilor:

$$R_x = \sum F_{ix} = H_A - P\sqrt{3}\cos\alpha = 0$$

$$\sum M_A = 4 \times q \times 2 + 6 \cdot P\sqrt{3}\sin\alpha - 8V_B + 10P = 0$$

$$\sum M_B = 8V_A - 4 \cdot q \cdot 6 - 2P\sqrt{3}\sin\alpha + 2P = 0$$

Pentru $\alpha=60^\circ$, $q=20kN/m$, $P=50kN$ se obțin:

$$H_A = P\sqrt{3}\cos 60 = 25\sqrt{3}\ kN$$

$$V_B = \frac{1}{8}(160 + 450 + 500) = 138,75\ kN$$

$$V_A = \frac{1}{8}(480 + 150 - 100) = 66,25\ kN.$$

- calculul eforturilor în secțiunile caracteristice (A, B, C, D, E):

$N_A = N_C = N_D^{st} = -H_A = -25\sqrt{3}kN$; $N_D^{dr} = N_B = N_E = 0$

$T_A = V_A = 66,25kN$; $T_C = T_A-4q = -13.75kN = T_D^{st}$

$T_D^{dr} = T_D^{st} - P\sqrt{3}\cos 30 = -88,75kN = T_B^{st}$

$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 50kN = T_E^{st}$.

Cum T_A este pozitivă iar T_C negativă, înseamnă că forța tăietoare se anulează pe intervalul A-C.

Notând cu ξ abscisa acestei secțiuni (fig. 7.31,a) vom avea $T_\xi = T_A - q\xi$; $\xi = T_A/q = 3,3125$ m;
$M_A=0$; $M_\xi = M_{max} = V_A \cdot \xi - q \cdot \xi \cdot \xi/2 = 109,727$kNm;
$M_C = V_A \cdot 4 - 4q \cdot 2 = 105$ kNm; $M_D = 6V_A - 4q \cdot 4 = 77,5$ kNm
$M_B = -2P = -100$ kN,; $M_E = 0$.

Reprezentând grafic valorile obținute și având în vedere precizările din paragraful (7.2) se obțin diagramele N, T și M reprezentate în figurile 7.31.b, 7.31.c și 7.31.d.

Exemplul 7.5.2

Se cer diagramele de eforturi T și M pe grinda din figura 7.32 în care P = 60kN, q = 10kN/m, $\mathcal{M}$=40kNm.

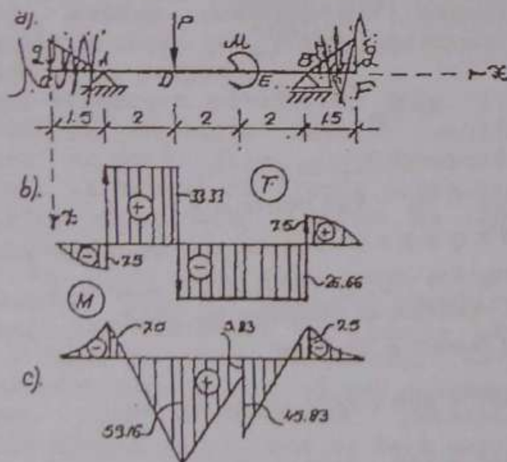


Fig. 7.32

Rezolvare:

- calculul reacțiunilor:

$R_x = \sum F_{ix} = H_A + 0 = 0$;

$$\sum M_A = \frac{1,5 \cdot q}{2} \cdot \frac{2}{3} 1,5 - 2P - \mathcal{M} + 6V_B - \frac{1,5 \cdot q}{2}\left(6 + \frac{2}{3} 1,5\right) = 0$$

$$\sum M_B = \frac{1,5 \cdot q}{2}\left(6 + \cdot \frac{2}{3} 1,5\right) - 6V_A + 4P - \mathcal{M} - \frac{1,5 \times q}{2} \times \cdot \frac{2}{3} 1,5 = 0$$

Înlocuind datele problemei se obțin: $H_A=0$;

$$V_B = \frac{1}{6}(7,50 + 120 + 40 + 52,5) = 34,167 \text{ kN}$$

$$V_A = \frac{1}{6}(52.5 + 240 - 40 - 7,5) = 40,833 \text{ kN}.$$

Verificare

$$R_z = \sum F_{iz} = -(V_A + V_B) + P + 2 \times \frac{1,5q}{2} = -7,5 + 75 = 0$$

- calculul eforturilor în secțiunile caracteristice (C, A, D, E, B, F): N=0; $T_C = 0$;

$$T_A^{st} = -\frac{1,5q}{2} = -7,5 \text{ kN};$$

$$T_A^{dr} = T_A^{st} + V_A = 33,333 \text{kN} = T_D^{st};$$

$$T_D^{dr} = T_D^{st} - P = -26,667 \text{kN} = T_E = T_B^{st};$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 7,5 \text{kN}$$

$$T_F = T_B^{dr} - \frac{1,5 \cdot q}{2} = 0; \; M_C = 0;$$

$$M_A = -\frac{1,5 \cdot q}{2} \cdot \frac{2}{3} \times 1,5 = -7,5 \text{ kN}$$

$$M_D = -\frac{1,5 \cdot q}{2}\left(\frac{2}{3} \times 1,5 + 2\right) + 2V_A = 59,166 \text{kNm}$$

$$M_E^{st} = -\frac{1,5 \cdot q}{2}\left(\frac{2}{3} \times 1,5 + 4\right) + 4V_A - 2P = 5,832 \text{kNm}$$

$M_K^{dr} = M_K^{st} + \mathcal{M} = 45,832\,kNm$

$$M_B = -\frac{1,5\cdot q}{2}\cdot\frac{2}{3}\times 1,5 = -7,5\ kNm; \quad M_F = 0.$$

Diagramele T şi M sunt construite în figurile 7.32,b şi 7.32,c.

Exemplul 7.5.3

Se cer diagramele N, T şi M pe grinda Gerber din fig. 7.33,a, încărcată cu forţele q = 10kN/m, P = 60kN şi $\mathcal{M}$ = 80kNm.

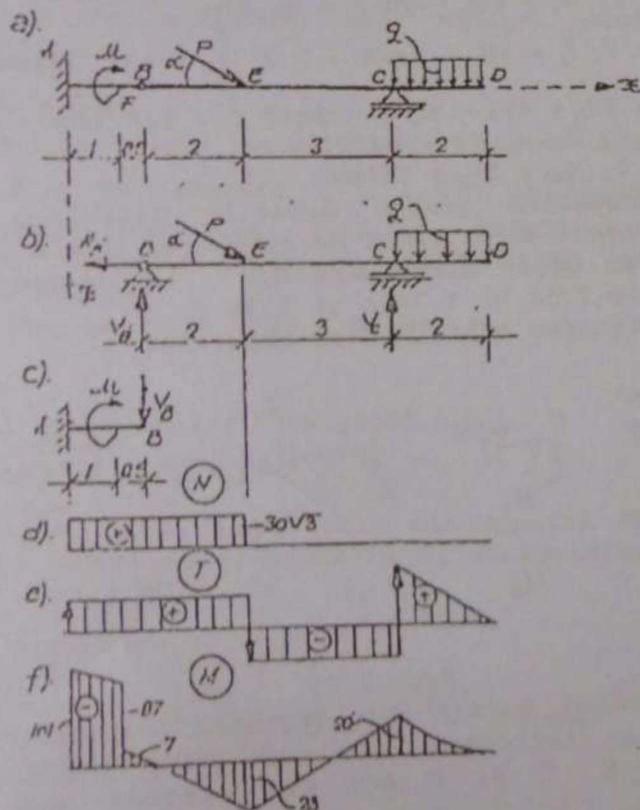


Fig. 7.33

Rezolvare:

Grinda independentă şi reacţiunile din reazemele acesteia sunt arătate în figura 7.33,b.

Exprimându-i echilibrul printr-o ecuaţie de proiecţie nulă, după axa x şi două ecuaţii de momente nule în raport cu punctele B şi C se obţine sistemul:

$$\begin{cases} -H_B + P\cos\alpha = 0 \\ 5V_B - 3P\sin\alpha + 2q\cdot 1 = 0 \\ 5V_C - 6\times 2q - 2P\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

a cărui soluţie este: $H_B = P\cos\alpha = 3\sqrt{3}q = 30\sqrt{3}$ kN; $V_B = 1,4q = 14kN$; $V_C = 3,6q = 36$ kN.

Având reacţiunile V_B, H_B şi V_C eforturile pe structură vor avea valorile:

$N_B = N_A = N_E^{st} = H_B = 30\sqrt{3}$ kN;

$N_E^{dr} = 30\sqrt{3} - 30\sqrt{3} = 0 = N_C = N_D$

$T_B^{st} = T_A = T_B^{dr} = T_E^{st} = V_B = 14$ kN.

$T_E^{dr} = T_C^{st} = 14 - 30 = -16$ kN

$T_C^{dr} = T_C^{st} + V_C = -16 + 36 = 20$ kN

$T_D = T_C^{dr} - 20 = 0$

$M_B = 0$

$M_F^{dr} = -0,5V_B = -7$ kNm; $M_A = -\mathcal{M} - 14\times 1,5 = -101$ kN

$M_F^{st} = M_F^{dr} - \mathcal{M} = -7 - 80 = -87$ kNm

$M_E = 2N_B = 28$ kNm; $M_C = -2q\cdot 1 = -20$kNm

Diagramele de eforturi sunt trasate în figurile 7.33,d, 7.33,e şi 7.33,f, respectând aceleaşi reguli ca şi în cazul grinzilor drepte simplu rezemate.

Exemplul 7.5.4

Să se traseze diagramele N, T şi M pe cadrul din figura 7.34.a. Se dau q=10kNm, P=85kN.

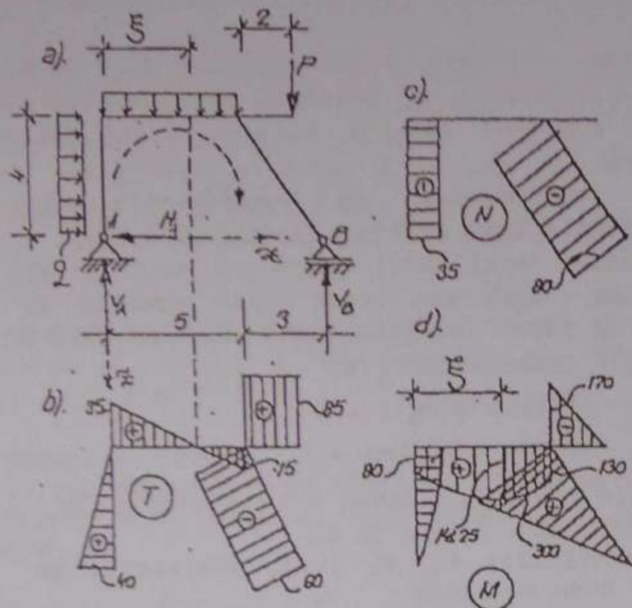


Fig. 7.34

Rezolvare:

- Se determină reacțiunile din reazemele A și B din condiția de echilibru a tuturor forțelor de pe cadru:

$$R_x = \sum F_{ix} = -H_A + 4q = 0,$$

$$\sum M_A = 4q\times 2 + 5q\times 2,5 + 7P - 8V_B = 0$$

$$\sum M_B = 8V_A + 4q\times 2 - 5q(3+2,5) - 1P = 0$$

- Cu valorile date în problemă, din ecuațiile de mai sus se obțin:

$$H_A=40\ kN;\quad V_B = \frac{1}{8}(80+125+595) = 100\,kN;$$

$$V_A = \frac{1}{8}(-80+275+85) = 35\,kN$$

Pentru verificare: $R_z = \sum F_{iz} = -(V_A+V_B)+5q+P = -135+135=0$.

Alegând sensul de parcurs din figură se calculează eforturile în secțiunile caracteristice (A, C, D, E, B), $N_A = -V_A = -35\ kN = N_{CA}$,

$$N_{CD} = -4q + H_A = 0 = N_{DC};\quad N_{ED} = N_{DE} = 0$$

$$N_B = -V_B\cos\alpha = -100\cdot\frac{4}{5} = -80\ kN = N_{DB}$$

$$T_A = H_A = 40\ kN;\quad T_{DC} = T_C - 5q = -15\ kN$$

$$T_{CA} = T_A - 4q = 0;\quad T_{ED} = T_{DE} = P = 85\ kN$$

$$T_{CD} = V_A = 35\ kN;\quad T_B = -V_B\sin\alpha = -60\ kN = T_{DB}$$

Se observă că T_{CD} și T_{DC} sunt de semne contrare, rezultă că forța tăietoare se anulează între secțiunile respective.

Notând cu ξ abscisa acestei secțiuni (fig. 7.34,a) vom avea

$$T_\xi = T_{CD} - q\xi = 0;\quad \xi = \frac{T_{CD}}{q} = \frac{35}{10} = 3,50\ m$$

$$M_A = 0;\quad M_C = 4H_A - 4q\times 2 = 80\ kNm$$

$$M_\xi = M_{max} = V_A\cdot\xi + 4H_A - 4q\times 2 - q\cdot\xi\cdot\frac{\xi}{2} = 141.25\,kNm$$

$$M_{DC} = 5V_A + 4H_A - 4q\times 2 - 5q\times 2,5 = 130\ kNm$$

$$M_E = 0;\quad M_{DE} = -2P = -170\,kNm;$$

$$M_B = 0;\quad M_{DB} = 3V_B = 300\,kNm.$$

Reprezentând grafic valorile calculate mai sus, în raport cu o linie de referință având forma cadrului se obțin diagramele N, T și M prezentate în figurile 7.34,b, 7.34,c și 7.34,d.

Verificarea echilibrului nodurilor:

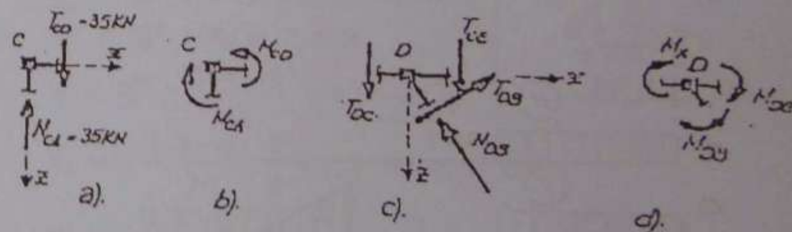


Fig. 7.35

Secționând barele din imediata vecinătate a nodurilor și introducând în secțiunile respective eforturile N, T și M așa cum acestea apar în

diagramele respective (fig. 7.34.b, c şi d) se obţin solicitările nodurilor, arătate în figura 7.35.

Pentru nodul C se observă cu uşurinţă satisfacerea condiţiei de echilibru.

În cazul nodului D (fig. 7.35, c şi d) vom avea:

$$R_x = \sum F_{ix} = T_{DA}\cos\alpha - N_{DB}\sin\alpha = 60 \times \frac{4}{5} - 80 \times \frac{3}{5} = 0$$

$$R_z = \sum F_{ix} = T_{1x} + T_{CE} - N_{DB}\cos\alpha - T_{DB}\cos\alpha =$$

$$= 15 + 85 - 80 \times \frac{4}{5} - 60\frac{3}{5} = 0$$

$$\sum M_D = M_{DA} - M_{DE} - M_{DC} = 300 - 170 - 130 = 0.$$

Condiţiile de echilibru ale nodului sunt îndeplinite.

Exemplul 7.5.5

Un arc de cerc cu 3 articulaţii are deschiderea ℓ = 6m, săgeata f = 2,25m şi linia naşterilor orizontală (fig. 7.36,a). Asupra lui acţionează o încărcare uniform distribuită pe verticală q = 20kN/m.

Se cer diagramele N, T şi M pe arc.

Rezolvare:

- calculul reacţiunilor (fig. 7.36,a).

$$V_A = V_B = \frac{q\ell}{2} = 20 \times 3 = 60\text{kN}.$$

Împingerile H_A şi H_B se obţin din ecuaţii de moment nul în raport cu articulaţia C, al forţelor acţionând pe arcele AC şi CB.

$$\sum M_C = f \times H_A + q\frac{\ell}{2} \times \frac{\ell}{4} - V_A \cdot \frac{\ell}{2} = 0$$

$$H_A = \frac{1}{f}\left(V_A\frac{\ell}{2} - q\frac{\ell^2}{8}\right) = \frac{1}{2,25}\left(60 \times 3 - 20 \times \frac{36}{8}\right) = 40\text{kN}$$

$H_B = H_A$.

Calculul eforturilor într-o secţiune oarecare a arcului se face cu relaţiile (7.13). Mărimile sinφ, cosφ şi y se obţin din considerente geometrice (fig. 7.36,a).

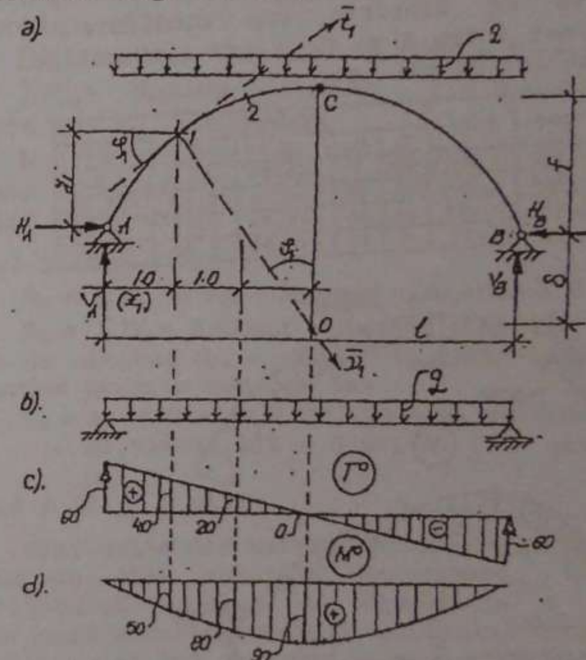


Fig. 7.36

$\sin\varphi = (0,5\ell - x)/r$ rezultă φ şi apoi cosφ

$y = r\cos\varphi - \delta$

Pentru determinarea razei r şi a distanţei δ a cercului din care face parte arcul ACB, exprimăm teorema lui Pitagora în triunghiul OAD:

$$AD^2 + OD^2 = OA^2 \text{ sau } \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (r-f)^2 = r^2; \quad \frac{\ell^2}{4} + r^2 - 2rf + f^2 = r^2;$$

$$r = \frac{\ell^2/4 + f^2}{2f} = \frac{9+5,0625}{2 \times 2,25} = 3,125\text{m}; \quad \delta = r - f = 3,125 - 2,25 = 0,875\text{m}.$$

La rândul lor, eforturile T_x^o şi M_x^o se obţin din diagramele T şi M trasate pe o grindă dreaptă având deschiderea ℓ şi încărcată cu forţele de pe arc (fig. 7.36,b) sunt date în figurile 7.36,c şi 7.36,d.

Trasarea diagramelor T şi M pe arc se face pe baza valorii acestora calculate într-un număr finit de secţiuni.

Din motive de simetrie vom considera 4 secţiuni, cuprinse între A şi C şi vom sistematiza calculele în tabelul de mai jos:

Secţ	x(m)	sinφ	cosφ	y(m)	eforturile				
					T_0	M_0	N	T	M
A	0	0,96	0,280	0	60	0	-68,80	-21,6	0,00
1	1	0,64	0,768	1,526	40	50	-56,32	5.12	-11,04
2	2	0,32	0,947	2,086	20	80	-44,28	6,14	-3,44
C	3	0	1	2,25	0	90	-40,00	0,00	0,00

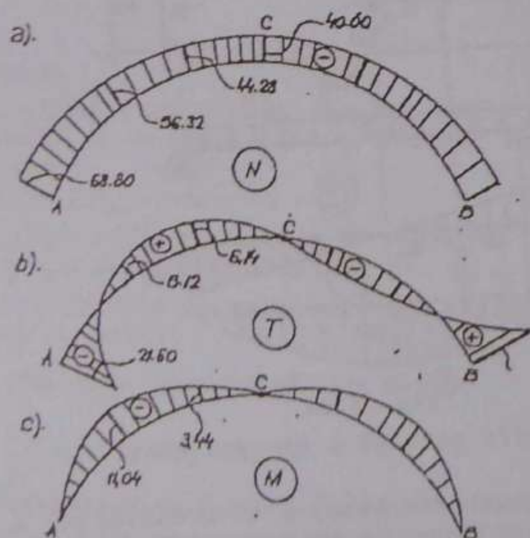


Fig. 7.37

Diagramele N, T şi M sunt trasate în figurile 7.37,a, b şi c.

Împărţind arcul într-un număr mai mare de bolţari se obţine un număr mai mare de secţiuni şi în consecinţă creşte precizia construcţiei diagramelor N, T şi M.

Printr-o discretizare suficient de fină a lungimii arcului se obţin diagramele căutate cu precizia dorită.

Exemplul 7.5.6

Se dă grinda cu zăbrele din figura 7.38 Cunoscând $\alpha = 60^\circ$, $a = 2,5$m, $P = 50$kN se cere:

a. Valoarea eforturilor din toate barele fermei folosind metoda izolării nodurilor.

b. Utilizând metoda secţiunilor se cere a fi calculate eforturile din barele 1-3, 2-3 şi 2-4.

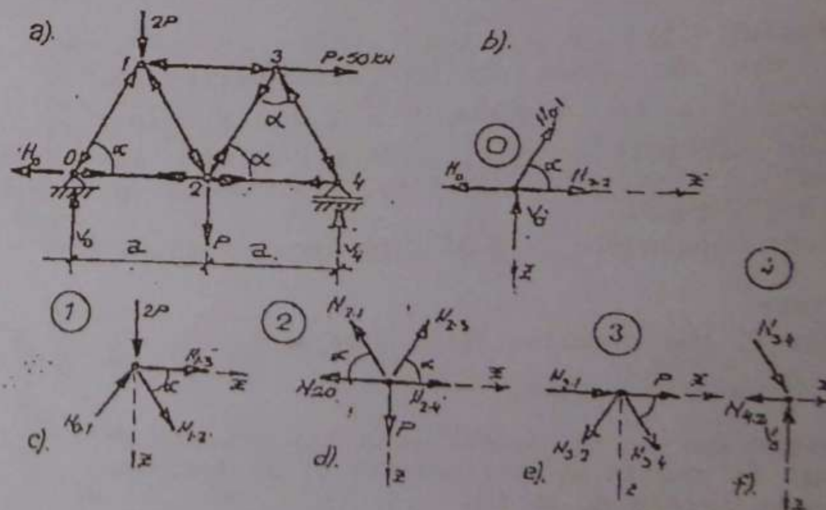


Fig. 7.38

Rezolvare

a. Se aplică metoda izolării nodurilor, calculând în prealabil reacțiunile V_0, H_0 și V_4 din condiția generală de echilibru a grinzii:

$$R_x = \sum F_{ix} = -H_0 + P = 0,$$

$$\sum M_0 = 2P \times \frac{a}{2} + P \times a + P \times h - 2a \times V_4 = 0$$

$$\sum M_4 = 2aV_0 - 1,5a \times 2P - Pa + Ph = 0$$

Se obține: $H_0 = P = 50kN$.

$$V_A = \frac{1}{5}(100 \times 1,25 + 50 \times 2,5 + 50 \times 2,165) = 71,65\ kN.$$

$$V_0 = \frac{1}{5}(3,75 \times 100) + 50 \times 2,5 - 50 \times 2,165 = 78,35)\ kN$$

Secționând barele concurente în nodul 0 și introducând pe direcțiile acestora eforturile necunoscute N_{01} și N_{02} se obține sistemul forțelor concurente din fig. 7.38,b. Exprimând echilibrul acestora prin două ecuații de proiecții se obțin:

$$R_x = \sum F_{ix} = -H_0 + N_{02} + N_{01}\cos\alpha = 0$$

$$R_z = \sum F_{iz} = -V_0 - N_{01}\sin\alpha = 0,$$

din care rezultă $N_{01} = -90,471$ kN, $N_{02} = 95,235$ kN. Semnul minus al efortului N_{01} indică faptul că sensul lui este invers, adică intră în nod (produce compresiune).

Se introduce acest sens în figura 7.38,a precum și sensul pozitiv al efortului N_{02}.

După nodul 0 vom izola nodul 1 deoarece în acesta se găsesc numai două bare de efort necunoscut (fig. 7.38,c).

Exprimând echilibrul acestuia rezultă:

$$R_x = \sum F_{ix} = N_{01}\cos\alpha + N_{13} + N_{12}\cos\alpha = 0$$

$$R_z = \sum F_{iz} = -N_{01}\sin\alpha + N_{12}\sin\alpha + 2P = 0$$ din care

se obțin: $N_{12} = -25,00$ kN; $N_{13} = -32,736$ kN.

Ambele eforturi au sensul invers celui arbitrar introdus în figura 7.39,c. Se introduc în nodurile 1,2 și 3 sensurile reale ale eforturilor găsite (fig. 7.38,a).

Din nodul 1 se poate trece în oricare din nodurile 2 și 3, în ambele existând numai două bare de efort necunoscut.

Exprimând echilibrul nodului 2 (fig. 7.38,d) se obțin:

$$R_x = \sum F_{ix} = -N_{20} - N_{21}\cos\alpha + N_{23}\cos\alpha + N_{24} = 0$$

$R_z = \sum F_{iz} = -N_{21}\sin\alpha - N_{23}\sin\alpha + P = 0$ din care $N_{23} = 82,735$ kN; $N_{24} = 41,367$ kN

Natura eforturilor N_{23} și N_{24} se introduce în schema grinzii din figura (7.38,a) prin săgeți ieșind din noduri.

Nodul 3 (fig. 7.38,e)

$$R_x = \sum F_{ix} = N_{31} - N_{23}\cos\alpha + N_{34}\cos\alpha + P = 0$$

$R_z = \sum F_{iz} = N_{32}\sin\alpha + N_{34}\sin\alpha = 0$; din ecuația a doua se obține: $N_{34} = -N_{32} = -82,735kN$ care introdus în prima ecuație conduce la:

$$R_x = 32,736 + 50 - (82,735 + 82,735) \times \cos\alpha = $$
$$= 82,736 - 82,735 = 0.001 \approx 0$$

Nodul 4 (fig. 7.38,f)

Eforturile din barele concurente în acesta sunt cunoscute din nodurile anterioare. Verificarea echilibrului nodului va reprezenta o cheie de verificare a corectitudinii calculului anterior.

$$R_x = \sum F_{ix} = -41,367 + 82,735 \cdot \cos\alpha = -41,36 + 41,3675 \approx 0.$$

$$R_z = \sum F_{iz} = -V_4 + 82,735 \cdot \sin\alpha = -71,65 + 71,65 = 0.$$

Deoarece eforturile determinate verifică cele 3 ecuații de echilibru ($R_x = \sum F_{ix} = 0$ în nodul 3 și $R_x = \sum F_{ix} = 0$ și $R_z = \sum F_{iz} = 0$ în nodul 4) calculul lor este corect.

Pentru determinarea eforturilor din barele 1-3, 2-3 și 2-4 se efectuează o secționare a grinzii astfel încât să fie tăiate barele de efort căutat (fig. 7.39,a).

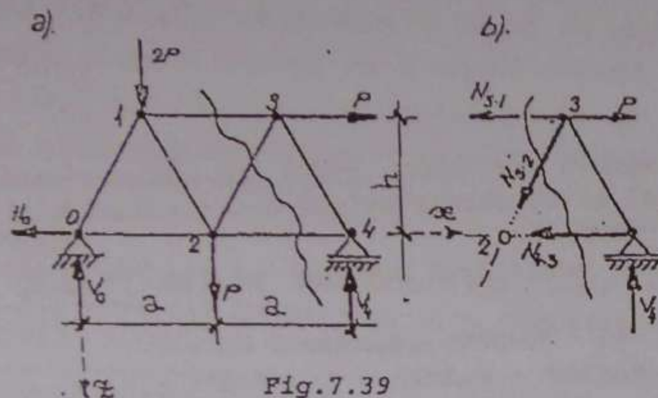


Fig.7.39

Pe direcţiile barelor tăiate se introduc eforturile căutate (fig. 7.39.b). Sensul acestora se introduce arbitrar. Punctele Ritter vor fi 2 şi 3. Exprimând echilibrul tronsonului din dreapta secţiunii (fig. 7.39.b) în raport cu aceste puncte şi printr-o ecuaţie de proiecţie pe verticală se obţin:

$$\sum M_2 = N_{31}\cdot h - 50h + V_4\cdot a = 0$$

$$\sum M_3 = N_{42}\cdot h - \frac{a}{2}\cdot V_4 = 0$$

$$h = 2,50\times \sin 60 = 2,165\text{m}$$

$$N_{31} = 50 - V_4\cdot\frac{a}{h} = -32,7367\text{kN}$$

$$N_{42} = V_4\cdot\frac{a}{2h} = 41,368\text{kN}$$

$R_z = \sum F_{iz} = N_{32}\sin\alpha - V_4 = 0;\ N_{34} = 82,734\text{kN}.$

Semnul minus al efortului N_{31} modifică faptul că sensul lui real este invers celui introdus în figura (7.39,b).

Observaţie

Aceeaşi valoare a eforturilor s-ar fi obţinut dacă se exprima echilibrul tronsonului din stânga secţiunii, evident, cu eforturile necunoscute, introduse pe direcţia barelor tăiate.

CAPITOLUL 8

CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE FIGURILOR PLANE

8.1 GENERALITĂŢI ŞI DEFINIŢII

În calculele de rezistenţă şi rigiditate a elementelor de structură, pe lângă caracteristicile mecanice ale materialelor şi eforturile produse de încărcările exterioare intervin o serie de caracteristici geometrice ale secţiunilor (figurilor) plane. Din categoria acestora fac parte:

a. *Aria secţiunii*, notată obişnuit cu A

Calculul acestei caracteristici se efectuează pe baza formei şi dimensiunilor secţiunii date, utilizând cunoştinţele de *Geometrie Plană*. Dimensiunile ariei sunt de lungime la puterea a doua (L^2) măsurându-se în orice unitate de lungime la pătrat: mm^2, cm^2, m^2 etc.

b. *Momentele statice* (S_y, S_z)

Prin moment static al unei secţiuni plane în raport cu o axă se înţelege suma algebrică a produselor dintre elementele de arie dA ale secţiunii şi distanţele acestora la axa considerată (fig. 8.1).

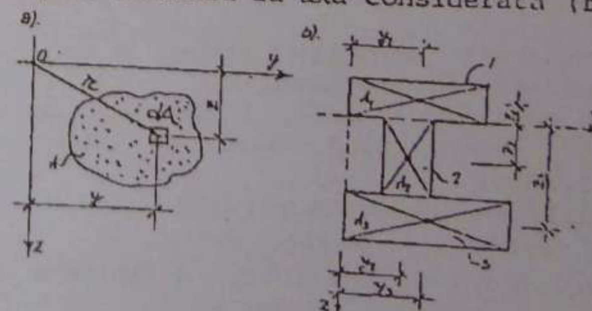


Fig. 8.1

Conform definiției date momentele statice ale figurii în raport cu axele Oy și Oz vor avea expresiile

$$S_y = \int_A z dA \qquad (8.1a)$$

$$S_z = \int_A y dA \qquad (8.1b)$$

Dacă suprafața dată A poate fi divizată într-un număr finit "n" de figuri simple, având cunoscute ariile A_i și distanțele la axe y_i și z_i, (fig. 8.1b) în expresiile momentelor statice (8.1a) și (8.1b) integralele pot fi înlocuite cu sume rezultând relațiile practice de calcul:

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} z_i A_i \qquad (8.2a)$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i \qquad (8.2b)$$

Comparând relațiile (8.2) și 3.8 se obțin expresiile

$$y_G \sum A_i = \sum A_i y_i = S_z$$

$$z_G \sum A_i = \sum z_i A_i = S_y,$$

în care y_G și z_G reprezintă coordonatele centrului de greutate al suprafeței considerate.

Pentru axele ce trec prin centrul de greutate al secțiunii, numite axe centrale $y_G = z_G = 0$, prin urmare, momentele statice în raport cu axe centrale sunt nule.

Referindu-ne la suprafața din figura (8.1b) momentele statice ale acesteia în raport cu axele Oy și Oz vor avea expresiile:

$S_y = -z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3$; $\quad S_z = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3$

Momentele statice au dimensiunea de lungime la puterea treia (L^3) măsurându-se în orice unitate de lungime la cub: mm^3, dm^3, cm^3, m^3 ș.a.m.d.

c. *Momente de inerție axiale*

Momentul de inerție axial al unei figuri plane în raport cu o axă se definește ca sumă a produselor dintre elementele de arie dA ale figurii și pătratele distanțelor acestora la acea axă. Cu notațiile din figura (8.1a), acestea se exprimă prin relațiile:

$$I_y = \int_A z^2 dA \qquad (8.3a)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \qquad (8.3b)$$

d. *Momente de inerție centrifugale*

Se numește moment de inerție centrifugal, în raport cu două axe rectangulare O_y și O_z, suma produselor elementelor de arie dA cu distanțele lor la cele două axe:

$$I_{yz} = \int_A yz dA \qquad (8.4)$$

e. *Momente de inerție polare*

Momentul de inerție polar al unei suprafețe în raport cu un punct (pol), O, reprezintă suma produselor elementelor de suprafață dA cu pătratele distanțelor acestora la punct. Cu notațiile din figura (8.1a):

$$I_p = \int_A r^2 dA \qquad (8.5)$$

Momentele de inerție axiale, centrifugale și polare au dimensiunea de (L^4) măsurându-se în orice unitate de lungime la puterea patra: mm^4, cm^4, dm^4, m^4 ș.a.m.d.

Din considerente geometrice, (fig. 8.1,a) $r^2=y^2+z^2$. Înlocuind această expresie în relația (8.5) rezultă: $I_p=\int_A (y^2+z^2)dA=\int_A y^2dA+\int_A z^2dA$, prin urmare

$$I_p = I_y + I_z \qquad (8.6)$$

8.2 VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE ÎN RAPORT CU AXE PARALELE. TEOREMA LUI STREINER

Fie o figură plană oarecare și un sistem de referință arbitrar yOz (fig. 8.2). Cunoscând momentele de inerție I_y, I_z în raport cu axele O_y și O_z și momentul de inerție centrifugal I_{yz} ne propunem a stabili relațiile de calcul ale momentelor de inerție I_{y1}, I_{z1} și I_{y1z1} ale figurii date în raport cu un alt sistem de axe $y_1O_1z_1$, având axele paralele cu cele ale sistemului yOz și distanțate de acestea cu a și b.

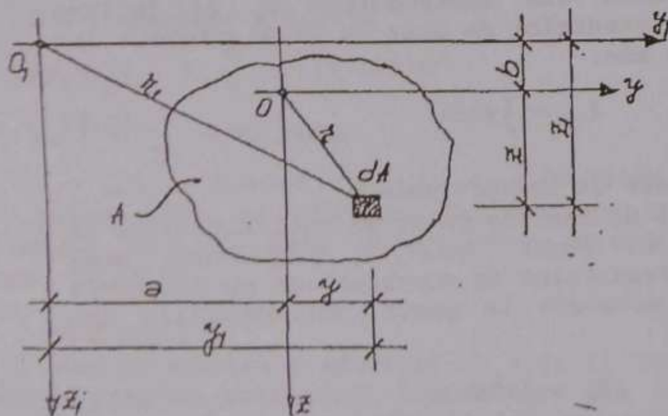


Fig. 8.2

Din considerentele geometrice (vezi figura 8.2) legătura dintre coordonatele elementului de arie dA în cele două sisteme de referință este dată prin relațiile $y_1=y+a$ și $z_1=z+b$.

În baza formulelor de definiție (8.3,a), (8.3,b) și (8.4) vom avea:

$$I_{y_1}=\int_A z_1^2dA=\int_A (z+b)^2dA=\int_A z^2dA+2b\int_A zdA+b^2\int_A dA=I_y+2bS_y+b^2A$$

$$I_{z_1}=\int_A y_1^2dA=\int_A (y+a)^2dA=\int_A y^2dA+2a\int_A ydA+a^2\int_A dA=I_z+2aS_z+a^2A$$

$$I_{y_1z_1} = \int_A y_1z_1dA = \int_A (y + a)(z + b)\,dA =$$

$$= \int_A yzdA + a\int_A zdA + b\int_A ydA + ab\int_A dA =$$

$$= I_{yz} + aS_y + bS_z + abA$$

Dacă axele Oy și Oz sunt axe centrale conform celor arătate în paragraful (8.1), momentele statice S_y și S_z sunt nule iar *expresiile momentelor de inerție în raport cu axe paralele cu cele centrale devin:*

$$I_{y_1} = I_y + b^2A, \qquad (8.7a)$$

$$I_{z_1} = I_z + a^2A, \qquad (8.7b)$$

$$I_{y_1z_1} = I_{yz} + abA\,. \qquad (8.7c)$$

Adunând ecuațiile (8.7,a) și (8.7,b) se obține expresia: $I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z + A\left(a^2 + b^2\right)$ care, în baza relației (8.6) devine:

$$I_{p_1} = I_p + \left(a^2 + b^2\right)A \qquad (8.8)$$

Relaţia (8.8) exprimă variaţia momentului de inerţie polar al unei figuri geometrice cu schimbarea polului.

Dacă sunt cunoscute momentele de inerţie în raport cu axe oarecare (Oy_1, Oz_1), faţă de axe paralele cu acestea trecând prin centrul de greutate a secţiunii (Oy, Oz), distanţate cu a şi b unele de altele (fig. 8.2) expresiile momentelor de inerţie rezultă din relaţiile (8.7) sub forma:

$$I_y = I_{y_1} - b^2A \qquad (8.9a)$$

$$I_z = I_{z_1} - a^2A \qquad (8.9b)$$

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} - abA \qquad (8.9c)$$

Expresiile acestora pun în evidenţă că momentele de inerţie în raport cu axe centrale au cea mai mică valoare comparativ cu momentele de inerţie calculate în raport cu oricare alte axe paralele cu cele centrale.

8.3 MOMENTELE DE INERŢIE ALE FIGURILOR SIMPLE ŞI COMPUSE

Momentele de inerţie ale figurilor simple se calculează cu relaţii directe, stabilite în funcţie de forma şi dimensiunile acestora.

Vom deduce aceste formule pentru câteva tipuri de figuri, frecvent întâlnite în domeniul tehnicii, ca secţiuni distincte sau ca părţi componente în alcătuirea figurilor compuse.

a. Secţiunea dreptunghiulară

Fie b şi h laturile unui dreptunghi Oy şi Oz axele lui centrale şi dA =bdz un element de arie situat la distanţa z de axa Oy (fig. 8.3).

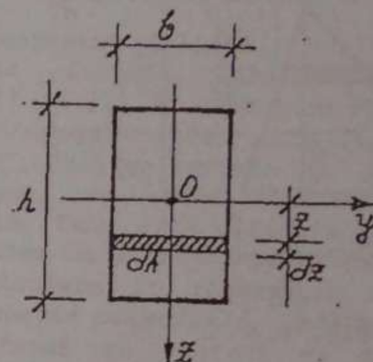


Fig. 8.3

Conform relaţiei (8.3a) vom avea:

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} bz^2 dy = \frac{b}{3} z^3 \Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} \qquad (8.10,a)$$

Analog se obţine

$$I_z = \frac{h}{3} x^3 \Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{b^3h}{12} \qquad (8.10,b)$$

b. Secţiunea triunghiulară

Considerând un triunghi oarecare, având baza b şi înălţimea h, în raport cu o axă y_1 ce trece prin vârful opus bazei şi paralelă cu aceasta un element de arie (fig. 8.4) va avea expresia $dA = b_z dz$, în care $b_z = \frac{b}{h} z_1$.

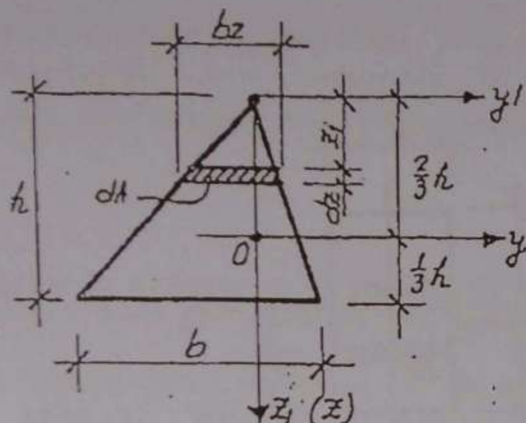


Fig. 8.4

Folosind ecuaţia (8.3a) ce defineşte momentul de inerţie axial vom avea $I_{y_1}=\int_A z_1^2 dA=\int_0^h \frac{b}{h} z^3 dz=\frac{bz^4}{4}\Big|_0^h=\frac{bh^4}{4}$.

În raport cu axa centrală y paralelă cu latura b, în baza primei relaţii din (8.9a) vom avea

$$I_y=\frac{bh^3}{4}-\frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2=\frac{bh^3}{36} \tag{8.11}$$

c. Momentele de inerţie ale cercului

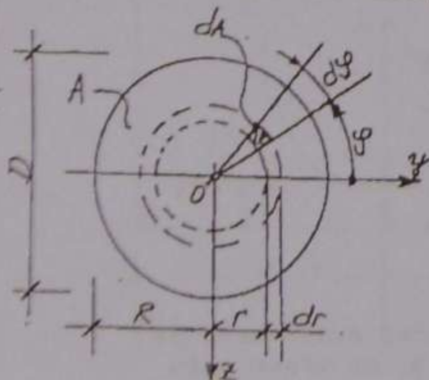


Fig. 8.5

La suprafaţa circulară, elementul de arie dA se obţine între două raze ce fac între ele unghiul dφ şi între două cercuri concentrice de raze r şi r+dr (fig. 8.5), prin urmare,

$$dA = dr\cdot r d\varphi;$$

Conform relaţiei (8.5) vom avea:

$$I_p=\int_A r^2 dA=\iint r^2 r dr d\varphi=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R r^3 dr=\varphi\Big|_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R=\frac{2\pi R^4}{4}=\frac{\pi R^4}{2}$$

Înlocuind $R=\frac{D}{2}$ se obţine expresia momentului de inerţie polar al suprafeţei circulare în raport cu diametrul acesteia,

$$I_p=\frac{\pi D^4}{32} \tag{8.12}$$

Momentul de inerţie axial al suprafeţei circulare rezultă în baza relaţiei (8.6) observând că în cazul cercului $I_y = I_z = I$, în consecinţă

$$2I_y = 2I_z = 2I = I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$ din care se obţin:

$$I_y = I_z = I = \frac{\pi D^4}{64} \tag{8.13}$$

În practica calculului de rezistenţă se întâlnesc frecvent secţiuni mai complexe, formate din dreptunghiuri, triunghiuri etc. (fig. 8.6).

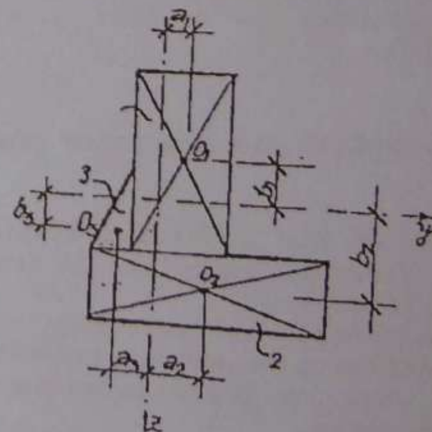


Fig. 8.6

Pentru determinarea momentelor de inerţie ale acestora în raport cu axele arbitrare Oy şi Oz paralele cu axele centrale proprii O_iy_i şi O_iz_i ale figurilor simple componente se folosesc relaţiile (8.7) sub forma:

$$I_y = \sum_{i=1}^{k}\left(I_{y_i} + A_i b_i^2\right) \tag{8.14a}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{k}\left(I_{z_i} + A_i a_i^2\right) \tag{8.14b}$$

în care k reprezintă numărul figurilor simple iar a_i şi b_i distanţele dintre axele $Oy-O_iy_i$, şi respectiv $Oz-O_iz_i$ iar A_i aria suprafeţei i.

Semnificaţiile geometrice ale acestora sunt arătate în fig. (8.6) divizată în două dreptunghiuri şi un triunghi (k = 3).

8.4 VARIAŢIA MOMENTELOR DE INERŢIE CU ROTIREA AXELOR. MOMENTE DE INERŢIE PRINCIPALE ŞI DIRECŢII PRINCIPALE

Fie o suprafaţă plană oarecare şi un sistem de referinţă ortogonal yOz din planul ei în raport cu care sunt cunoscute momentele de inerţie I_y, I_z şi I_{yz} (fig. 8.7).

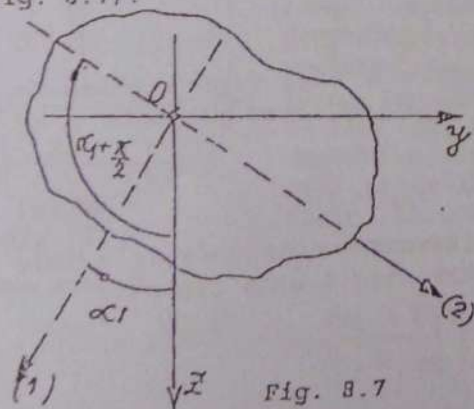


Fig. 8.7

Se demonstrează [3], [8], [21] că oricare ar fi geometria figurii, există două direcţii ortogonale (1) şi (2) în raport cu care momentul de inerţie centrifugal este nul ($I_{1,2}$ = 0) iar momentele de inerţie (notate cu I_1 şi I_2) iau valori extreme, unul din ele fiind maxim iar celălalt minim. Cele două direcţii astfel definite poartă denumirea de *direcţii principale de inerţie*. Momentele calculate în raport cu ele se numesc *momente de inerţie principale*. Dacă punctul O (fig. 8.7) se confundă cu centrul de greutate G al secţiunii axele de inerţie principale poartă denumi·'a de *axe centrale principale de inerţie*.

În domeniul construcţiilor secţiunile elementelor structurale sunt de regulă figuri geometrice având o axă sau două axe de simetrie (fig. 8.8).

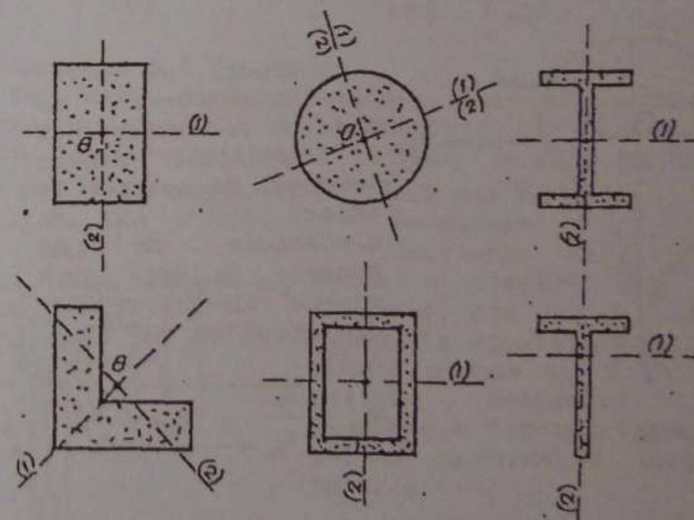


Fig. 8.8

Din studiul variaţiei momentelor de inerţie cu rotirea axelor reiese că *orice axă de simetrie a unei figuri este o axă principală de inerţie*. Cea

de a doua axă principală este reprezentată de orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie. Ea formează cea de a doua axă centrală principală de inerţie atunci când trece prin centrul de greutate G a secţiunii. Momentele de inerţie calculate în raport cu axele centrale principale de inerţie poartă denumirea de *momente centrale principale de inerţie*. În cazul figurilor ce nu prezintă nici o axă de simetrie, direcţiile principale şi momentele de inerţie principale se calculează conform prevederilor din [3], [8], [21] etc.

8.5 MODULE DE REZISTENŢĂ ŞI RAZE DE GIRAŢIE

Raportul dintre momentul de inerţie al unei secţiuni faţă de o axă centrală şi distanţa la cel mai depărtat punct de această axă poartă denumirea de *modul de rezistenţă* (fig. 8.9):

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \tag{8.15}$$

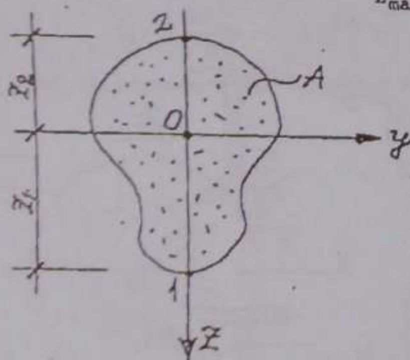


Fig. 8.9

Uneori se atribuie noţiunea de module de rezistenţă şi rapoartelor dintre momentul de inerţie în raport cu o axă şi distanţele de la aceasta la cele două puncte (1 şi 2) mai depărtate de ea (fig. 8.9):

$$W_{y_1} = \frac{I_y}{z_1} \quad ; \quad W_{y_2} = \frac{I_y}{z_2}.$$

Modulele de rezistenţă au dimensiunea de $[L^3]$ măsurându-se în orice unitate de lungime la puterea 3-a: mm^3, dm^3, cm^3, m^3 ş.a.m.d.

În cazul *dreptunghiului* (fig 8.3) distanţele de la axele Oy şi Oz la fibrele externe sunt $h/2$ şi respectiv $b/2$ iar momentele de inerţie au expresiile (8.10a şi b).

În baza formulelor de definiţie se obţin:

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{h}{2}} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6} \tag{8.16a}$$

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{b}{2}} = \frac{2b^3h}{12b} = \frac{hb^2}{6} \tag{8.16b}$$

La *secţiunea circulară* (fig. 8.5), distanţa maximă de la orice axă centrală la un punct de pe conturul exterior este $\frac{D}{2}$ iar momentul de inerţie axial are valoarea dată de (8.13). Cu acestea se obţine

$$W_y = W_z = W = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32} \tag{8.17}$$

Raportul dintre momentul de inerieţie polar I_p, dat de relaţia (8.12) şi distanţa $D/2$ poartă denumirea de modul de rezistenţă polar, notat cu W_p,

$$W_p = \frac{\pi D4}{32} : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \tag{8.17}$$

Prin *raze de giraţie* a unei figuri plane în raport cu axele Oy şi Oz se definesc mărimile i_y şi i_z ce satisfac relaţiile:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \; ; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \tag{8.18}$$

în care I_y şi I_z sunt momentele de inerţie axiale în raport cu aceleaşi axe, iar A aria figurii.

Pentru axele principale de inerţie se definesc razele de giraţie principale

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}; \; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \qquad (8.19b)$$

Razele de giraţie au dimensiunea de [L] şi se măsoară în orice unitate de lungime: mm, cm, dm, mm. ş.a.m.d.

8.6 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 8.6.1

Pentru secţiunea unei grinzi având forma I, cu dimensiunile din figura (8.10), se cer momentele de inerţie centrale principale, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie corespunzătoare. Se dau: h_i=60 cm; b_i=12mm; δ=20 mm; b_t=30 cm.

Rezolvare

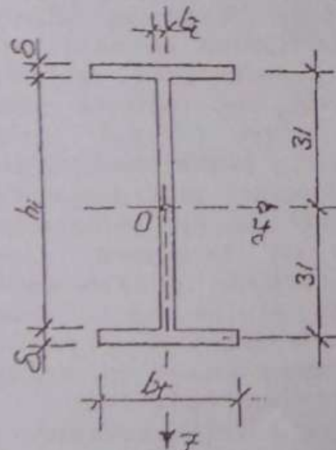


Fig. 8.10

Secţiunea prezintă două axe de simetrie. Axele Oy şi Oz suprapuse peste cele de simetrie reprezintă axele centrale principale de inerţie ale secţiunii. Observând că figura dată este compusă din 3 dreptunghiuri, calculul momentelor de inerţie se va face pe baza relaţiilor (8.14a) şi (8.14b) în care momentele de inerţie proprii se calculează cu relaţiile (8.10a) şi (8.10b). Cu notaţiile din figura (8.10) vom avea:

$$I_y = \frac{b_i h_i^3}{12} + 2\left[\frac{b_t \delta^3}{12} + \delta b_t\left(\frac{h_i + \delta}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1,2 \times 60^3}{12} + 2\left(\frac{30 \times 2^3}{12} + 30 \times 2 \times 31^2\right) =$$

$$= 136960 \quad cm^4 = I_1$$

$$I_z = \frac{h_i b_i^3}{12} + 2\frac{\delta b_t^3}{12} = \frac{60 \times 1,2^3}{12} + 2 \times \frac{2 \times 30^3}{12} = 9009 \; cm^4 = I_2$$

$$z_{max} = \frac{h_i}{2} + 2 = 32 \, cm; \; y_{max} = \frac{b_t}{2} = 15 \, cm$$

Folosind relaţia (8.15):

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{136960}{32} = 4280 \; cm^3; \; W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{9009}{15} = 600,60 \; cm^3$$

Cu relaţiile (8.19) se obţin razele de giraţie

$$A = 2 \cdot \delta \times b_t + b_i h_i = 2 \times 2 \times 30 + 1,2 \times 60 = 192 \; cm^2$$

$$; i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{136960}{192}} = 26,708 cm; \; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{9009}{192}} = 6,850 cm.$$

Exemplul 8.6.2

Se cer momentele de inerţie centrale principale, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie ale secţiunii din figura (8.11). Se dau: b_i=10 cm; h_i=60 cm; h_v=15 cm; δ=10 cm; b_t=40 cm.

Rezolvare

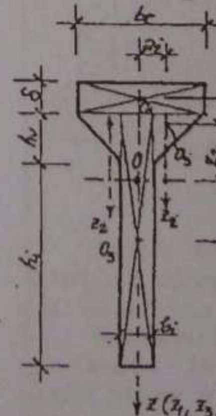


Fig. 8.11

Secţiunea dată prezintă o singură axă de simetrie, axa Oz. Divizând suprafaţa acesteia în trei figuri simple 1, 2 şi 3, poziţia centrului de greutate a figurii date se obţine cu ecuaţia (3.8b) în care:

$$z_1 = \frac{\delta}{2} = 5\text{ cm};\ z_2 = 10 + \frac{1}{3}h_v = 10 + \frac{1}{3}15 = 15\text{ cm};\ z_3 =$$

$$= \delta + \frac{1}{2}(h_i + h_v) = 10 + 0{,}5(60 + 15) = 47{,}5\text{ cm};$$

$$z_c = \frac{5 \times 4 \times 10 + 15 \times 2 \times \frac{15 \times 15}{2} + 47,5 \times 75 \times 10}{40 \times 10 + 2 \times \frac{15 \times 15}{2} + 75 \times 10} = 29,818 \quad \text{cm}$$

Din considerente geometrice

$$b_1 = z_c - \frac{\delta}{2} = 29{,}818 - 5 = 24{,}818\text{ cm}$$

$$b_2 = z_c - \left(\delta + \frac{1}{3}h_v\right) = 29{,}818 - 15 = 14{,}818\text{ cm}$$

$$b_3 = z_3 - z_c = 47{,}5 - 29{,}818 = 17{,}682\text{ cm}$$

Cu elementele precizate mai sus, utilizând relațiile (8.14a) și (8.14b) vom avea

$$I_y = \frac{b_t\delta^3}{12} + b_t\delta b_1^2 + 2\frac{b_v h_v^3}{36} + 2\frac{b_v h_v}{2} \times b_2^2 + \frac{b_i(h_i + h_v)^3}{12}$$

$$+ b_i(h_i + h_v)b_3^2 = \frac{40 \times 10^3}{12} + 40 \times 10 \times 24,818 +$$

$$+ \frac{2 \times 15 \times 15^3}{36} + 2 \times \frac{15 \times 15}{2} \times 14,818^2 + + \frac{10 \times 75^3}{12} +$$

$$+ 10 \times 75 \times 17,682^2 = 615530 \quad \text{cm}^4$$

Pentru calculul momentului de inerție I_z vom observa că $a_1 = a_3 = 0;\ a_2 = \frac{b_i}{2} + \frac{1}{3}b_v = 5 + 5 = 10\text{cm}$

cu care

$$I_z = \frac{\delta b_t^3}{12} + 2\frac{h_v b_v^3}{36} + 2\frac{b_v h_v}{2} \times a_2^2 + \frac{b_i^3 h_i}{12} = \frac{10 \times 40^3}{12} +$$

$$+ 2\left(\frac{15 \times 15^3}{36} + \frac{15 \times 15}{2} \times 10^2\right) + \frac{10^3 \times 75}{12} = 141146\text{ cm}^4$$

Pe baza elementelor geometrice ale figurii se calculează:

$Y_{max} = 20\text{ cm}$; $Z_{max} = h_i + \delta + h_v - z_c = 55,182$ cm;

$$A = 40 \times 10 + 2 \times \frac{15 \times 15}{2} + 75 \times 10 = 1375 \quad \text{cm}^2$$

după care

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{615530}{55,182} = 11155 \quad \text{cm}^3$$

$$W_z = \frac{I_z}{Y_{max}} = \frac{141146}{20} = 7057 \quad \text{cm}^3$$

$$i_1 = i_y = \sqrt{\frac{615530}{1375}} = 21,158 \quad \text{cm}$$

$$i_2 = i_z = \sqrt{\frac{141146}{1375}} = 10,132. \quad \text{cm}$$

Capitolul 9

ÎNTINDEREA ŞI COMPRESIONAREA AXIALĂ

9.1 DEFINIŢII. EFORTURI ŞI TENSIUNI ÎN BARELE SOLICITATE AXIAL

O bară este solicitată axial atunci când în orice secţiune transversală a ei acţionează un singur efort: *forţa axială N*. Exemplul cel mai simplu în acest sens este cel al barei drepte încărcate la capete cu două forţe P dirijate după axa ei longitudinală. Dacă N>0 (fig. 9.1,a)bara este întinsă iar dacă N<0 bara este comprimată (fig. 9.1,b). Formal, întinderea nu diferă de compresiune decât prin semnul forţei N. În domeniul construcţiilor elementele solicitate axial sunt numeroase. Din multitudinea acestora, în fig. 9.1,c este prezentat un zid comprimat centric de încărcarea q, uniform distribuită, şi de greutatea proprie g iar în figura 9.1,d un stâlp supus acţiunii forţelor P şi Q provenind din acţiunea grinzilor asupra consolelor acestuia.

Neglijând greutatea proprie a stâlpului şi a consolelor rezultă schema încărcărilor axiale dată în figura 9.1,e şi diagrama efortului axial N pe stâlp (fig. 9.1,f).

Seria elementelor de construcţie supuse la solicitări axiale pure poate fi completată cu structurile articulate (grinzile cu zăbrele), firele, tiranţii etc.

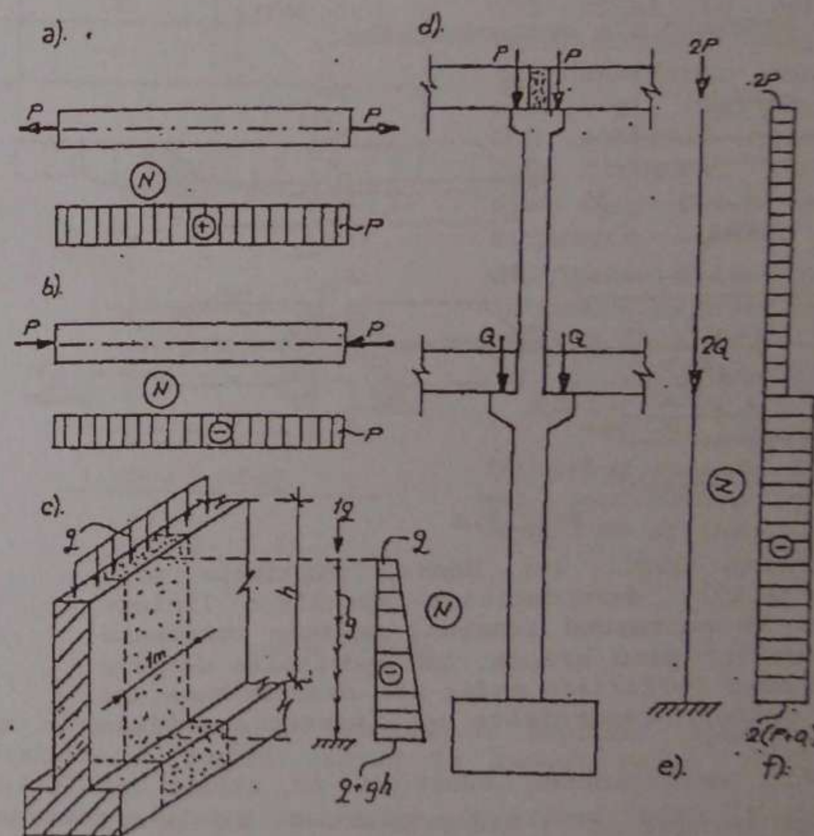


Fig. 9.1

Fiind corpuri deformabile barele solicitate axial se alungesc, dacă sunt întinse, (fig. 9.2,b) sau se scurtează dacă sunt comprimate (fig. 9.2,c).

Considerând două secţiuni plane şi normale pe axa barei înainte de deformare 1-1 şi 2-2, ele rămân plane şi normale pe bară (1'-1' respectiv 2'-2') şi după deformare. Aceasta înseamnă că toate fibrele componente ale barei cuprinse între cele

două secţiuni s-au alungit ori sau scurtat cu aceeaşi cantitate $\Delta a = a' - a$. Rezultă deci că în orice punct al unei secţiuni normale deformaţiile specifice liniare $\left(\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}\right)$ au aceeaşi valoare, deci, pe secţiune ele sunt constante.

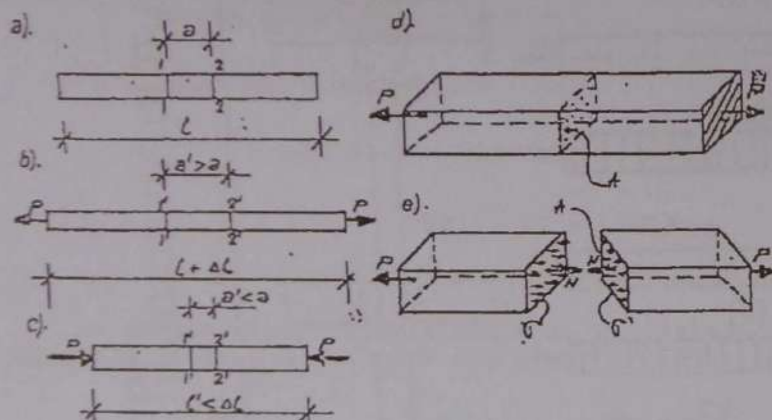


Fig. 9.2

În baza legii lui Hooke, exprimate prin relaţia (6.12), deformaţiilor specifice liniare constante le corespund tensiuni normale constante (σ = constant) prin urmare, în ***secţiunile normale ale unei bare solicitate axial iau naştere tensiuni normale uniform repartizate pe întreaga secţiune*** (fig. 9.2,e).

Pentru determinarea acestora se utilizează relaţia (6.4) care, pentru σ = constant, ia forma, $N = \sigma\int_A dA = \sigma A$, din care,

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{9.1}$$

Relaţia (9.2) constituie *formula fundamentală a întinderii şi compresiunii centrice*, în care N reprezintă efortul axial din secţiune iar A aria secţiunii transversale normale pe bară. Dacă N>0 tensiunile σ sunt pozitive şi reprezintă întinderi iar dacă N<0 ele sunt negative şi reprezintă compresiuni.

9.2 DEFORMAŢII ŞI DEPLASĂRI

Barele solicitate axial prin deformare îşi modifică atât lungimea cât şi dimensiunile secţiunilor transversale. Dacă bara (fig. 9.3,a) este întinsă ea se alungeşte şi îşi micşorează dimensiunile secţiunii transversale (fig. 9.3,b) iar dacă este comprimată se scurtează şi îşi măreşte secţiunea (fig. 9.3,c).

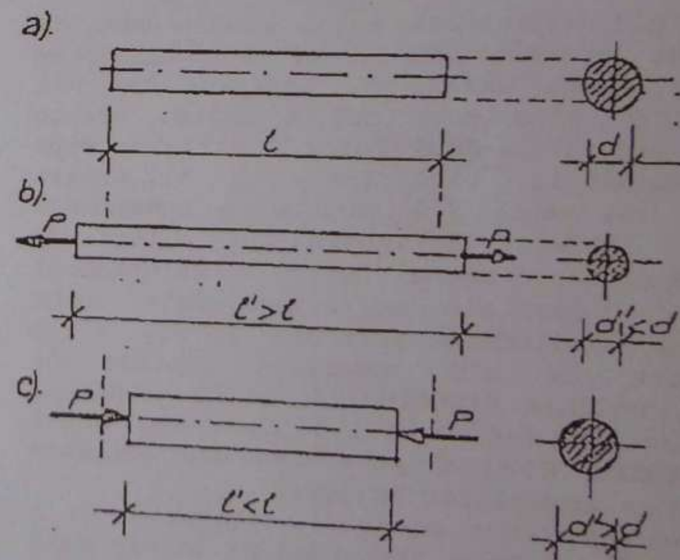


Fig. 9.3

Notând cu ℓ lungimea şi cu d diametrul unei bare de secţiune circulară înainte de solicitare (fig. 9.3,a), după încărcare aceasta se va deforma, ajungând la dimensiunile ℓ' şi d'.

Diferenţa $\Delta\ell = \ell' - \ell$ reprezintă deformaţia liniară absolută, iar $\Delta d = d - d'$ deformaţia transversală absolută. Acestora le corespund deformaţii specifice, liniare şi respectiv transversale definite prin relaţiile:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\ell - \ell'}{\ell} \qquad (9.2)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d - d'}{d} \qquad (9.3)$$

În domeniul elastic de solicitare al materialului, legătura dintre deformaţia liniară ε şi tensiunea normală σ ce o produce este dată de legea lui Hooke (6.12) scrisă în forma $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$. Înlocuind valoarea σ dată de relaţia (9.1) se obţine $\frac{N}{EA} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$ de unde

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} \qquad (9.4)$$

în care E reprezintă modulul de elasticitate longitudinală a materialului din componenţa barei. Produsul EA poartă denumirea de *rigiditate a barei la solicitări axiale*.

Dacă forţa axială variază în lungul barei, studiul deformaţiilor acesteia se face pe un element diferenţial de lungime dx detaşat din bară prin secţionarea acesteia cu două plane normale de abscise x şi x+dx (9.4).

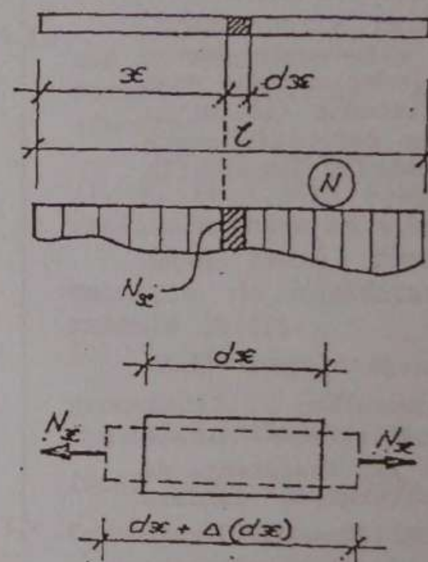


Fig. 9.4

Lungimea dx fiind infinitezimală efortul axial în cele două secţiuni poate fi considerat constant şi egal N_x. Sub acţiunea acestuia tronsonul studiat (fig. 9.4,b) se alungeşte cu o cantitate $\Delta(dx)$ ce se poate exprima cu relaţia (9.4)

$$\Delta(dx) = \frac{N_x dx}{EA}.$$

Integrând relaţia de mai sus membru cu membru se obţine:

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \frac{N_x}{EA} dx \qquad (9.5)$$

în care N_x este o funcţie ce exprimă legea de variaţie a forţei axiale în lungul barei (fig. 9.4,a).

Deformaţia specifică transversală ε_t se exprimă de regulă în funcţie de ε prin relaţia

$$\varepsilon_t = -\mu\varepsilon \qquad (9.6)$$

în care μ reprezintă o constantă numită *coeficientul lui Poisson*, care este specific fiecărui material în parte. Pentru domeniul materialelor de construcţii $\mu = 0,00...0,50$.

9.3 CALCULUL PRACTIC DE REZISTENȚĂ ȘI RIGIDITATE A BARELOR SOLICITATE AXIAL

Pentru a-și îndeplini rolul structural, orice bară solicitată axial trebuie să îndeplinească două cerințe fundamentale, cea de rezistență (să nu se rupă) și cea rigiditate (să nu se deformeze peste anumite limite admisibile). Matematic, condițiile precizate se exprimă prin relațiile:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le R \tag{9.7}$$

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} \le \Delta\ell_a \tag{9.8}$$

în care termenii N, A, E și ℓ au semnificațiile celor din relațiile (9.1) și (9.4) iar rezistența de calcul a materialului R și *deformația liniară admisibilă* $\Delta\ell_a$ sunt caracteristici de calcul ale materialului și respectiv ale elementului structural. Valorile acestora sunt date în norme tehnice. Pentru oțelul moale de construcții OL37 folosit în realizarea construcțiilor metalice R=2100 daN/cm² iar pentru lemnul de rășinoase R=100 daN/cm². Obișnuit deformația liniară admisibilă Δl_a este dată ca fracțiune din lungimea ℓ a elementului calculat $\left(\frac{\ell}{200}, \frac{\ell}{300}, \frac{\ell}{500}, \frac{\ell}{600}, \frac{\ell}{1000} \text{ etc.}\right)$, în raport de rolul și importanța elementului structural respectiv.

Relațiile (9.7) și (9.8) se folosesc uzual în calculul de rezistență și rigiditate al barelor solicitate axial, la întindere sau compresiune.

Conținutul și modul de rezolvare al celor 3 probleme fundamentale ale Rezistenței materialelor cu ajutorul acestora este următorul:

a. *Verificarea*

Având cunoscută secțiunea transversală A a unei bare, materialul din care aceasta este alcătuită și efortul axial N care o solicită, prin verificare se urmărește a se stabili dacă aceasta satisface condiția de rezistență (9.7) și cea de rigiditate (9.8).

Pentru aceasta, din normele tehnice se extrag caracteristicile de calcul R, E și Δl_a. Odată acestea cunoscute operația de verificare revine la testarea existenței inegalităților date de relațiile (9.7) și (9.8).

b. *Dimensionarea*

Cunoscând efortul axial N ce solicită o bară, lungimea acesteia ℓ, rolul ei structural și materialul din care urmează a fi realizată (deci $\Delta\ell_a$, R și E) prin dimensionare se urmărește stabilirea secțiunii transversale a barei respective ca formă și dimensiuni în așa fel încât aceasta să îndeplinească concomitent condiția de rezistență și cea de rigiditate.

Pentru aceasta se folosește relația (9.7) luată la limită, $\frac{N}{A} = R$ din care se calculează așa numita *aria necesară*, notată A_{nec}:

$$A_{nec} = \frac{N}{R} \tag{9.9}$$

Relația (9.9) reprezintă *formula de dimensionare* la solicitări axiale. Forma geometrică a secțiunii se alege. În continuare, pentru stabilirea dimensiunilor secțiunii, se exprimă aria geometrică a formei alese A și se egalează cu cea necesară.

Astfel:

- pentru o bară de secțiune circulară (fig. 9.5,a) $A = \frac{\pi d^2}{4} = A_{nec}$ de unde rezultă $d = R\sqrt{\frac{A_{nec}}{\pi}}$
- pentru secțiunea pătrată (fig. 9.5b) $A = a^2 = A_{nec}$, din care $a = \sqrt{A_{nec}}$

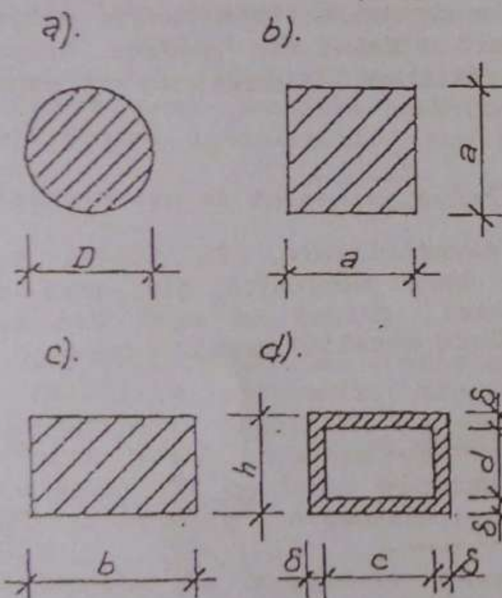


Fig. 9.5

- pentru secțiunea dreptunghiulară (9.5c) sau pentru orice altă formă de secțiune (fig. 9.5d) aria A poate cuprinde două sau mai multe dimensiuni ca mărimi necunoscute. Cum pentru calculul se dispune de o singură ecuație ($A=A_{nec}$) pentru rezolvarea problemei se exprimă valorile acestora în raport cu una din ele. În cazul secțiunii dreptunghiulare luând a=kb, în care k=h/b=1,5...3,00, vom avea $A=kb^2=A_{nec}$, din care se obține $b = \sqrt{kA_{nec}}$ și apoi a=kb.

Dimensiunile rezultate din calculele de mai sus se rotunjesc prin adaus, în limite prevăzute de normele tehnice, ariile acestora numindu-se efective (A_{ef}).

Pentru barele realizate din profile laminate (I, U, L, T etc) dimensionarea revine la alegerea profilului care să aibă aria efectivă $A_{ef} \geq A_{nec}$.

Dacă barei dimensionate i se impune și condiția de rigiditate aceasta se verifică cu relația (9.8).

Dacă inegalitatea nu se verifică ($\Delta\ell > \Delta\ell_a$) se procedează la *redimensionarea barei* din condiția de rigiditate. Pentru aceasta se folosește relația (9.8) luată la limită: $\frac{N\ell}{EA} = \Delta\ell_a$; din care rezultă formula de redimensionare:

$$A_{nec} = \frac{N\ell}{E\Delta\ell_a} \qquad (9.9')$$

c) *Capacitatea portantă*

Efortul N_{cap} pe care îl poate prelua o bară de secțiune A, realizată dintr-un material având rezistența de calcul R se determină cu relația (9.7) luată la limita $N_{cap} = AR$ (9.10).

Dacă barei considerate i se impune și condiția de rigiditate ($\Delta\ell \leq \Delta\ell_a$), din relația (9.8) luată la limită se calculează:

$$N_{cap} = \frac{EA\Delta\ell_a}{\ell} \qquad (9.11)$$

iar efortul capabil al barei va fi reprezentat de cea mai mică valoare obținută cu relațiile (9.10) și (9.11).

9.4 BARE CU VARIAȚIE BRUSCĂ DE SECȚIUNE SOLICITATE AXIAL

Barele solicitate axial de secțiune constantă sau de secțiune variabil continuă în lungul axei prezintă o distribuție uniformă a tensiunilor normale σ în secțiunile ei normale (fig. 9.6,a). În numeroase cazuri barele prezintă variații bruște de secțiune, ca urmare a unor slăbiri produse de găuri, crestături, gâtuiri, defecte de fabricație etc.

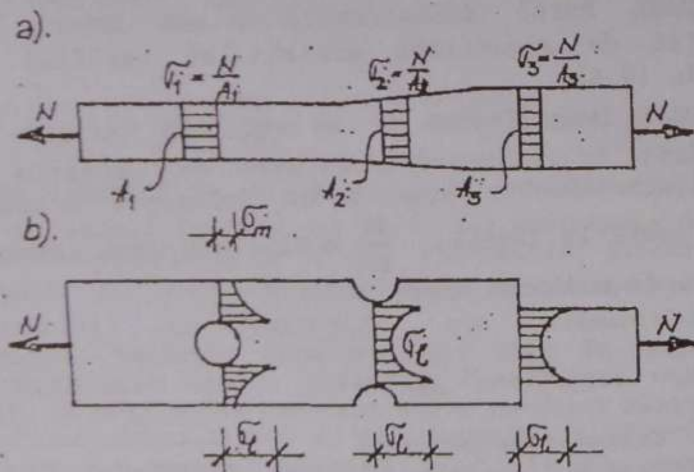


Fig. 9.6

Studii teoretice și experimentale riguroase pun în evidență că în secțiunile transversale ce conțin asemenea slăbiri (fig. 9.6,b) tensiunile normale σ prezintă valori locale σ_l mari în fibrele din imediata vecinătate a slăbirii, după care scad accentuat pe măsura depărtării de locul acestora. Notând cu A_{br} aria secțiunii barei fără slăbiri și cu A_{sl} aria slăbirilor, aria secțiunii de material rămasă în secțiunea slăbită, numită *arie netă* (A_{net}) va fi dată de relația evidentă $A_{net}=A_{br}-A_{sl}$.

Admițând ipoteza unei distribuții uniforme a tensiunilor σ pe această arie, expresia valorii lc medii va avea expresia

$$\sigma_m = \frac{N}{A_{net}} \tag{9.12}$$

Deoarece $A_{net} < A_{br}$ rezultă că tensiunile σ date de relația (9.12) sunt superioare ca modul tensiunilor σ din orice secțiune brută, î consecință ele reprezintă tensiunile maxime ce po apare în bară. Având în vedere acest lucru condiția de rezistență a barei se va exprima pri: relația:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}} \le R \tag{9.13}$$

Pentru exemplificare, în figura 9.7a este prezentată o bară alcătuită din două corniere, solicitată axial, prinsă la unul din capete cu nituri de o placă metalică numită *guseu*.

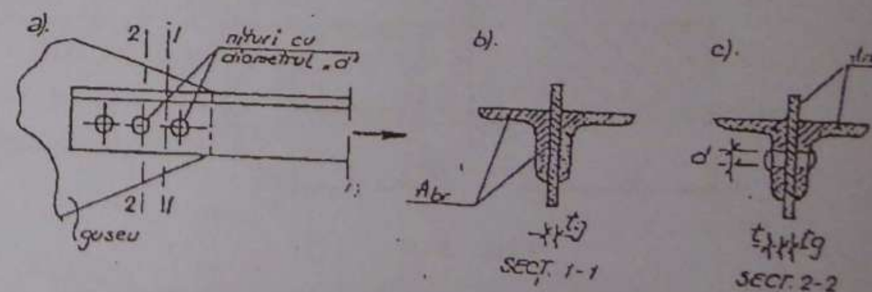


Fig. 9.7

Pe lungimea ℓ a barei se identifică două secțiuni caracteristice: secțiunea 1-1, fără slăbiri de arie A_{br} (fig. 9.7,b) și secțiunea 2-2,

prin oricare din nituri, slăbită ca urmare a găurii de nit, reprezentând aria netă (fig. 9.7,c). Din considerente geometrice $A_{net}=A_{br}-2dt$, în care d reprezintă diametrul nitului iar t grosimea aripii cornierei.

Pornind de la relația (9.13) calculul de rezistență la întindere și compresiune al barelor prezentând variații brusce de secțiune se face la fel ca cel al barelor de secțiune constantă utilizând aria netă A_{net} în locul ariei fără slăbiri A.

Verificarea unei secțiuni slăbite revine la testarea existenței inegalității date prin relația (9.13).

La dimensionare se folosește relația (9.9) sub forma

$$A_{nec} = k_s \frac{N}{R} \qquad (9.14)$$

în care k_s = 1,10...1,50 este un coeficient care ține seama de slăbirile secțiunii. Alegând valoarea acestuia în domeniul precizat, din relația (9.14) se obține aria brută necesară. În continuare se alcătuiește secțiunea ca formă și dimensiuni și se calculează aria ei netă din considerente geometrice $A_{net}=A_{br}-A_{sl}$.

Dimensionarea se consideră terminată numai după efectuarea operației de verificare folosind formula (9.13).

Efortul capabil al unei secțiuni slăbite se obține din relația (9.13) luată la limită și are expresia $N_{cap}=A_{net}R$ (9.15).

Observații

1) Calculul deformațiilor $\Delta\ell$ ale barelor prezentând variații brusce de secțiune se face cu relația (9.4) în care $A=A_{br}$.

2) Verificarea condiției de rigiditate se fac în același mod ca și în cazul barelor de secțiun constantă.

9.5 INFLUENȚA GREUTĂȚII PROPRII ÎN CALCULUL BARELOR SOLICITATE AXIAL

Greutatea elementelor de construcți solicitate axial la întindere sau compresiune s constituie ca o încărcare suplimentară distribuit pe volumul acestora.

În unele cazuri de alcătuire și solicitar ponderea ei este redusă în raport cu încărcăril exterioare și poate fi neglijată în calculul d rezistență al acestora. Este cazul barelor di structurile plane articulate, a stâlpilor metalic sau din lemn puternic solicitați etc. În alte cazuri de stâlpi și ziduri din beton, beton armat, zidării de piatră sau cărămidă etc. pondere greutății proprii în starea de eforturi, de tensiuni și deformații devine însemnată și nu mai poate fi neglijată în calculul lor de rezistență. Pentru ilustrarea efectului și a modului de introducere în calcul al acestei încărcări vom considera o bară de secțiune constantă A, fixată la partea superioară și încărcată cu o forță P la capătul opus (fig. 9.8,a).

Într-o secțiune x a barei efortul axial N_x și tensiunea normală σ_x vor avea valorile:

$$N(x) = P + \gamma Ax; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{P}{A} + \gamma x$$

în care γ este greutatea specifică a materialului din alcătuirea barei.

Pentru x=0 se obține efortul axial și tensiunea normală în secțiunea de capăt D;

$N_D = P;\quad \sigma_D = \frac{P}{A}$, iar pentru $x=\ell$, aceleaşi mărimi, în capătul B;

$$N_B = N_{max} = P + \gamma A\ell;\ \sigma_B = \sigma_{max} = \frac{P}{A} + \gamma\ell$$

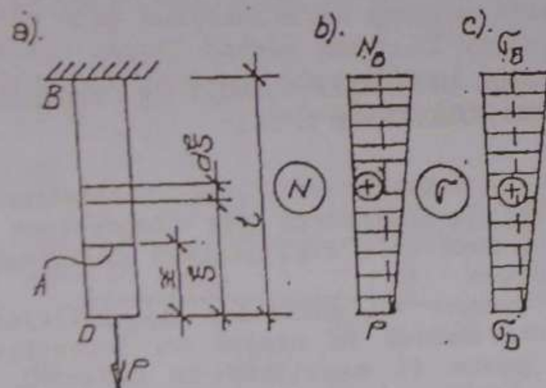


Fig. 9.8

Diagramele N_x şi σ_x sunt trasate în figurile 9.8,b şi 9.8,c.

Bara va satisface condiţia de rezistenţă dacă

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \gamma\ell \leq R \tag{9.18}$$

Relaţia (9.18) este folosită în rezolvarea problemelor rezistenţei materialelor când se ţine seama de greutatea proprie a corpurilor.

Verificarea de rezistenţă revine la testarea existenţei inegalităţii din relaţia (9.18).

Luând inegalitatea (9.18) la limită, succesiv rezultă $\frac{P}{A} + \gamma\ell = R;\ \frac{P}{A} = R - \gamma\ell$, din care se deduce cu uşurinţă:

- *formula pentru dimensionare*

$$A_{nec} = \frac{P}{R - \gamma\ell} \tag{9.19}$$

- *expresia capacităţii portante a barei*

$$P_{cap} = A(R - \gamma\ell) \tag{9.20}$$

9.6 BARE STATIC NEDETERMINATE SUPUSE LA EFORTURI AXIALE

Particularităţile de calcul ale acestora constau în următoarele:

1. Ecuaţiile scalare de echilibru sunt insuficiente pentru determinarea reacţiunilor din reazeme, impunându-se găsirea unor relaţii suplimentare care asociate ecuaţiilor de echilibru să conducă la sisteme de ecuaţii algebrice cu numărul ecuaţiilor egal cu cel al reacţiunilor necunoscute. Ecuaţiile suplimentare menţionate se obţin de regulă pe baza deformaţiilor structurii calculate.

2. În bare pot exista eforturi şi în absenţa încărcărilor exterioare. Variaţiile de temperatură, deplasările de reazeme, inexactităţile de montaj etc. conduc la apariţia unor eforturi axiale N şi a unor tensiuni normale σ ce pot avea valori însemnate, impunând introducerea lor în calculul barelor respective.

Sistemele static nedeterminate în domeniul construcţiilor sunt numeroase iar calculul lor face obiectul disciplinei de Statica Construcţiilor.

În cadrul acestui capitol vom aborda doar câteva cazuri de bare static nedeterminate al căror calcul poate fi abordat pe baza cunoştinţelor de Mecanică, dobândite până în prezent.

a. *Bara articulată la capete încărcată axial cu o forță P*

Fie bara OB de secțiune constantă A, și lungime l, încărcată cu forța P acționând în punctul C (fig. 9.9,a).

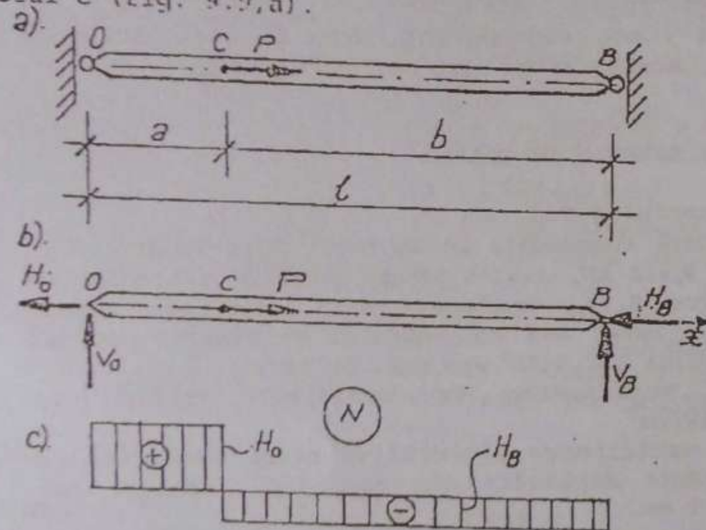


Fig. 9.9

Suprimând cele două articulații și înlocuindu-le cu forțele de legătură corespunzătoare rezultă patru reacțiuni necunoscute: H_o, V_o, H_B și V_B (fig. 9.9b). Exprimând echilibrul sistemului de forțe H_o, V_o, P, H_B și V_B (fig. 9.9b) printr-o ecuație de proiecție după axa Ox a barei și două ecuații de moment nul în raport cu punctele A și B se obține un sistem de trei ecuații cu patru necunoscute,

$$R_x = \sum F_{ix} = -H_o + P - H_B = 0$$
$$\sum M_o = V_B l = 0 \qquad (9.21)$$
$$\sum M_B = V_o l = 0$$

Pentru determinarea lor unitară este necesară o ecuație suplimentară care se obține pe baza deformațiilor barei. În acest scop se observă (fig. 9.14c) că bara se alungește pe tronsonul OC și se scurtează pe tronsonul BC, dar rămâne de aceeași lungime, articulațiile O și B împiedicând orice deplasări. Vom avea deci $\Delta l_{OC} + \Delta l_{CB} = 0$ (a).

Dar $\Delta l_{OC} = \frac{H_o a}{EA}$ și $\Delta l_{CB} = -\frac{H_B b}{EA}$ astfel că relația (a) devine $\frac{H_o a}{EA} - \frac{H_B b}{EA} = 0$ și conduce la egalitatea $H_o = \frac{b}{a} H_B$ (b).

Asociind ecuația (b) la sistemul de ecuații (9.21) se obține un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute a cărui soluție este:

$$H_o = P\frac{b}{l}; \quad V_o = 0$$
$$H_B = P\frac{a}{l}; \quad V_B = 0 \qquad (9.22)$$

Dacă bara OB este acționată de mai multe forțe P_1, P_2... în calculul reacțiunilor se folosesc rezultatele obținute mai sus aplicând principiul suprapunerii efectelor (fig. 9.10).

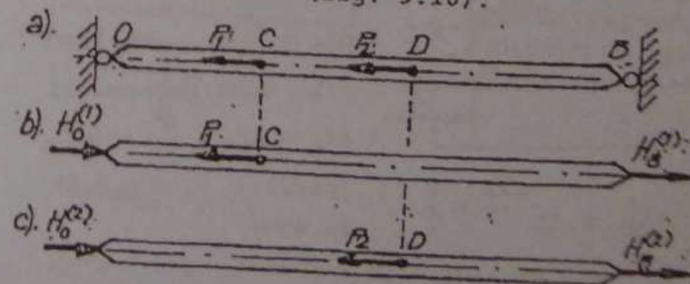


Fig. 9.10

Aplicând succesiv cele două forțe P_1 și P_2 se obțin reacțiunile $H_1^{(1)}, H_B^{(1)}, H_O^{(2)}, H_B^{(2)}$ reacțiunile finale $H_O = H_O^{(1)} + H_O^{(2)}, H_B = H_B^{(1)} + H_B^{(2)}$.

Reacțiunile $V_O=V_B=0$ nu s-au mai figurat.

b. Bara dublu încastrată sub efectul variațiilor de temperatură

Să considerăm bara OB dublu încastrată, de arie A și lungime ℓ montată la temperatura t_0, ajunsă în exploatare la temperatura t (fig. 9.11a).

Dacă una din încastrări nu ar exista bara s-ar dilata termic cu cantitatea

$$\Delta\ell_t = \alpha_t\ell(t - t_0) = \alpha_t\ell\Delta_t \qquad (9.23)$$

unde α_t este coeficientul de dilatare termică a materialului din alcătuirea barei.

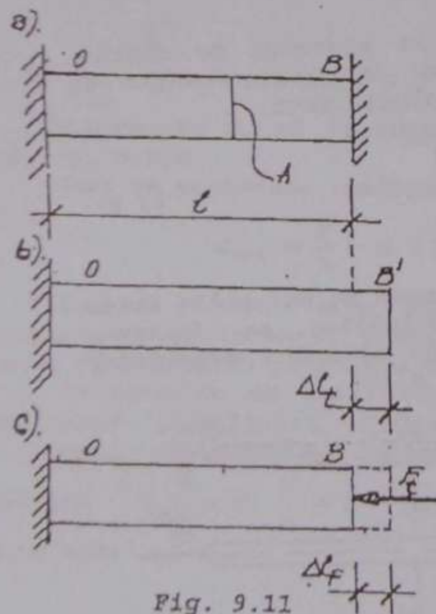


Fig. 9.11

Cum încastrarea presupusă eliminată există, efectul ei poate fi echivalat cu al unei forțe F_t ce ar produce barei o deformație $\Delta\ell_F$ de aceeași mărime dar de sens opus (fig. 9.11,c).

Conform relației (9.4) vom avea $\Delta\ell_F = \frac{F_t\ell}{EA}$. Egalând cele două deformații $\Delta\ell_F = \Delta\ell_t = \frac{F\ell}{EA} = \alpha_t\ell\Delta_t$ rezultă $F_t = \alpha_t\Delta_t EA$ și apoi

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A} = \alpha_t E\Delta_t \qquad (9.24)$$

Analizând expresia tensiunii σ_t se observă că aceasta nu depinde de geometria barei, în consecință tensiunile din variații de temperatură σ_t nu pot fi controlate prin conformare structurală (formă și mărime a secțiunii "A", lungime ℓ etc).

Din acest considerent, ori de câte ori este posibil, aceste structuri vor fi evidente.

9.7 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 9.7.1

O bară suspendată la un capăt este încărcată cu forțele P_1=30 kN, P_2=130 kN și P_3=200kN acționând ca în figura 9.12. Cunoscând aria secțiunii transversale a barei A=5 cm², modulul de elasticitate al materialului E=2,1+10⁶ daN/cm². Se cere:

a) verificarea de rezistență știind că R=2100daN/cm²

b) verificarea rigidității barei cunoscând că nu se admit deplasări ale capătului inferior mai mari de 2 mm.

Rezolvare

a) Pentru cunoașterea secțiunii celei mai periculoase (de efort axial maxim) se trasează diagrama N. În secțiunile caracteristice A,B,C și D vom avea:

$$N_{AB} = P_1 = 30kN = N_{BA};$$

$$N_{BC} = 30 - P_2 = -100kN = N_{CB};$$

$$N_{CD} = N_{CB} + P_3 = 100kN = N_{DC}.$$

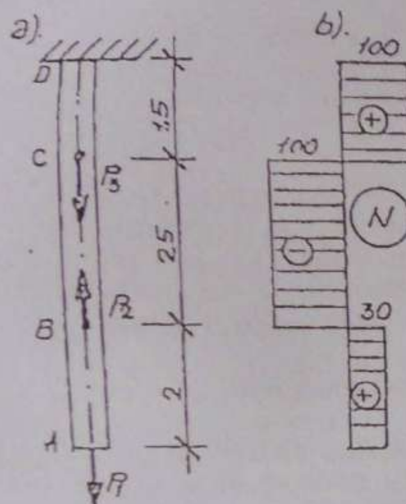


Fig. 9.12

Diagrama efortului axial N este dată în figura 9.12,b din care rezultă N_{max}=100kN.
Pentru verificare se utilizează relaţia (9.7)

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{10000}{5} = 2000\,\frac{daN}{cm^2} < R = 2100\ daN/cm^2$$

b) Pe tronsoanele AB şi CD bara se va alungi iar pe tronsonul BC se va scurta. Valorile acestor deformaţii se calculează cu relaţia (9.4):

$$\Delta\ell_{AB} = \frac{N_{AB}\ell_{AB}}{EA} = \frac{3000 \times 200}{2,1 \times 10^6 \times 5} = 0,058cm$$

$$\Delta\ell_{BC} = \frac{N_{BC}\ell_{BC}}{EA} = -\frac{10000 \times 250}{2,1 \times 10^6 \times 5} = -0,238cm$$

$$\Delta\ell_{CD} = \frac{N_{CD}\ell_{CD}}{EA} = \frac{10000 \times 350}{2,1 \times 10^6 \times 5} = 0,333cm$$

Deformaţia totală a barei va fi $\Delta\ell=\Delta\ell_{AB}+\Delta\ell_{BC}+\Delta\ell_{CD}=0,153cm$.

Întrucât $\Delta\ell=0,153cm<\Delta l_a=0,20cm$, condiţia de rigiditate a barei este îndeplinită.

Exemplul 9.7.2

bară de rigiditate infinită AB, încărcată cu o forţă P=126kN este suspendată la capete prin două bare AC=2m şi BD=5m (fig.9.13). Cunoscând R=2000daN/cm² şi E=2,1x10⁶ daN/cm² se cere:

a) Dimensionarea barelor AC şi BD ca bare de secţiune circulară astfel încât bara AB să rămână orizontală şi după deformare.

b) Tensiunile din fiecare bară dimensionată la punctul "a".

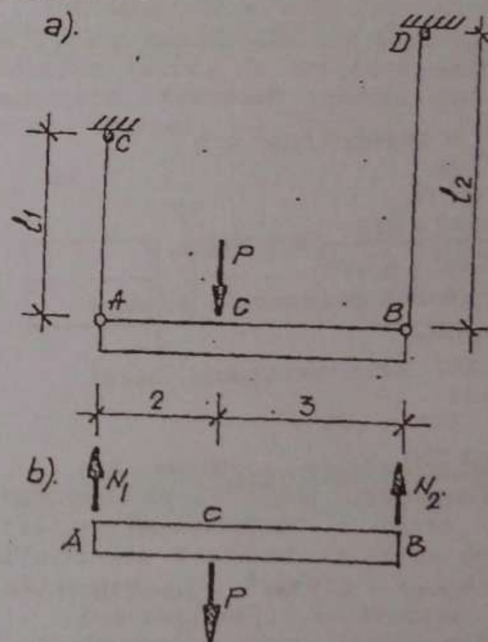


Fig. 9.13

Rezolvare

a) Secţionând barele AC şi BD, şi introducând pe direcţiile lor eforturile necunoscute N_1 şi N_2 bara AB va fi supusă sistemului de forţe în echilibru arătat în figura 9.13,b. Exprimând această condiţie prin ecuaţii de moment nul în raport cu punctele A şi B se obţine:

$$\sum M_B = 5N_1 - 3P = 0; \sum M_A = 5N_2 - 2P = 0$$

din care rezultă $N_1 = 0,6P = 126kN$; $N_2 = 0,4P = 84kN$.

Pentru a răspunde cerințelor problemei vom dimensiona bara cea mai solicitată din condiția de rezistență iar bara de la capătul opus din condiția de rigiditate.

Folosind relația (9.9) se obține:

$$A_{1nec} = \frac{N_1}{R} = \frac{12600}{2100} = 6{,}0cm^2.$$

Din condiția $A_1 = \frac{\pi D^2}{A} = A_{1nec} = 6cm^2$ rezultă

$$D = 2\sqrt{\frac{6}{\pi}} = 2{,}764cm^2 = 27{,}64mm.$$

Adoptând D = 28 mm:

$$A_{e\ell} = \frac{\pi \times 2{,}8^2}{4} = 6{,}158cm^2$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_{e\ell}} = \frac{12600}{6{,}158} = 2046daN/cm^2 < R.$$

Utilizând relația (9.4)

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{EA_1} = \frac{12600 \times 250}{2{,}1 \times 10^6 \times 6{,}158} = 0{,}244\ cm.$$

Pentru ca bara AB să rămână orizontală și după deformare, va trebui ca $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$.

Folosind relația (9.10) aria secțiunii barei BD se va calcula cu relația:

$$A_{2nec} = \frac{N_2\ell_2}{E\Delta\ell_2} = \frac{8400 \times 500}{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}244} = 8{,}197cm^2.$$

Din condiția $A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = A_{2nec} = 8{,}197cm^2$, rezultă

$D_2 = 3{,}230 = 32{,}30mm \cong 32mm$.

Corespunzător acestui diametru $A_2 = \frac{\pi \times 3{,}2^2}{4} = 8{,}043cm^2$,

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8400}{8{,}043} = 1044daN/cm^2,$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell_2}{EA_2} = \frac{8400 \times 500}{2{,}1 \times 10^6 + 8{,}043} = 0{,}248cm \approx \Delta\ell_1$$

astfel că bara AB va rămâne practic orizontală.

Exemplul 9.7.3

O bară metalică alcătuită din două profile [alăturate și sudate între ele preia o încărcare G=200kN și 4 forțe de aceeași intensitate P, transmise acesteia prin intermediul a 4 corniere L80x80x8 prinse de bară cu câte două nituri ϕ23mm fiecare (fig. 9.14).

Cunoscând $R=2100daN/cm^2$, $E=2{,}1\times10^6 daN/cm^2$ și l=3,50m se cere:

a) Valoarea forțelor capabile P_{cap} ale barei

b) Alungirea totală a barei.

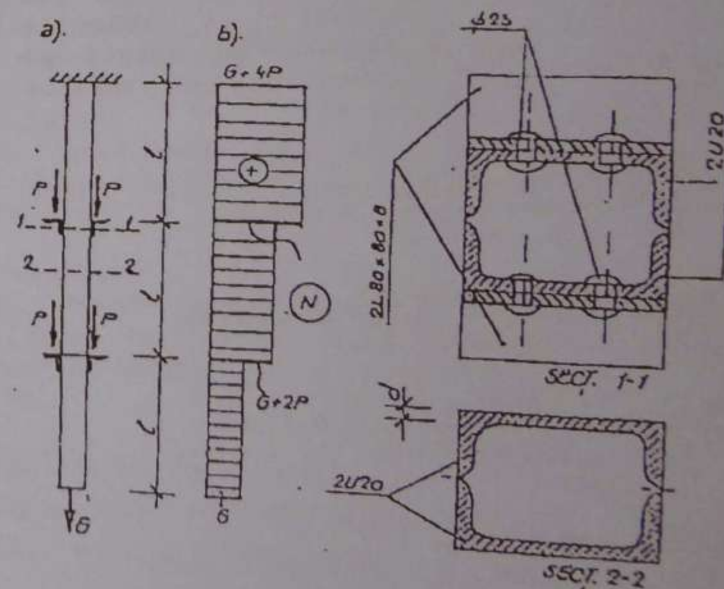


Fig. 9.14

Rezolvare

a) Bara prezintă două secţiuni caracteristice: secţiunea 1-1 prin niturile de prindere a cornierelor de profilele U (fig.9.14,c) şi secţiunea 2-2 efectuată între două nituri de arie A_2, reprezentând aria brută a barei. Din anexa 4 (tabelul profilelor laminate U) se găseşte $A=32,20cm^2$ şi $d=8,5mm$. Cu acestea şi având în vedere fig. 9.14c vom avea:

- aria brută $A_{br} = 2x32,2 = 64,4cm^2$
- aria slăbirilor $A_{sl} = 4\phi d = 4x2,3x0,85 = 7,82cm^2$
- aria netă $A_{net} = A_{br}-A_{sl} = 56,58cm^2$.

Efortul capabil al secţiunii slăbite, conform relaţiei (9.15) are valoarea:

$N_{cap} = A_{net}R = 56,58x2100 = 1188,18x10^2daN = 1188,18kN.$

Efortul maxim ce solicită bara conform diagramei N din fig. 9.14,b are valoarea:

$N_{max} = G + 4P = 200kN + 4P.$

Punând condiţia ca $N_{max} = N_{cap}$ vom avea $200+4P=1188,18kN$, din care $P_{cap} = 247,045kN$.

Corespunzător acestei forţe, eforturile axiale pe cele trei tronsoane ale barei vor fi:

$N_1 = G;\ N_2 = G+2P = 694,09kN$ şi $N_3 = G+4P = 1188,18kN$.

Deformaţia totală a barei se va scrie:

$$\Delta\ell = \frac{N_1\ell}{EA_{br}} + \frac{N_2\ell}{EA_{br}} + \frac{N_3\ell}{EA_{br}} = (N_1+N_2+N_3)\frac{\ell}{EA_{br}} =$$

$$=(200 + 694,09 + 1199,18) \times \frac{10^2x350}{2,1x10^6x64,4} = 0,539cm \cong 5,40mm.$$

CAPITOLUL 10

FORFECAREA

10.1 EFORTURI ŞI TENSIUNI LA FORFECAREA PURĂ

O secţiune a unei bare în care $T\neq0$, $N = M = M_t = 0$ este solicitată la forfecare pură. Forţele T, dintr-o astfel de secţiune, pe cele două feţe ale acesteia, formează perechi egale şi direct opuse (fig. 10.1,a).

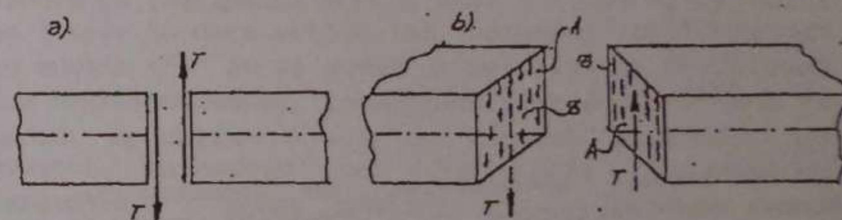


Fig. 10.1

Sub acţiunea acestora, feţele secţiunii au tendinţa de lunecare în sensuri opuse cu efect de tăiere (secţionare) a barei, motiv pentru care eforturile T se numesc *forţe de lunecare* sau *forţe tăietoare*.

Convenţional, forfecarea pură se consideră solicitarea ce apare într-o secţiune situată între două forţe exterioare ce acţionează normal pe axa barei, în sensuri opuse şi pe suporţi situaţi la distanţe foarte mici t.

Exemplul practic ilustrativ în acest sens îl reprezintă tăierea tablelor metalice cu foarfeca (fig. 10.2).

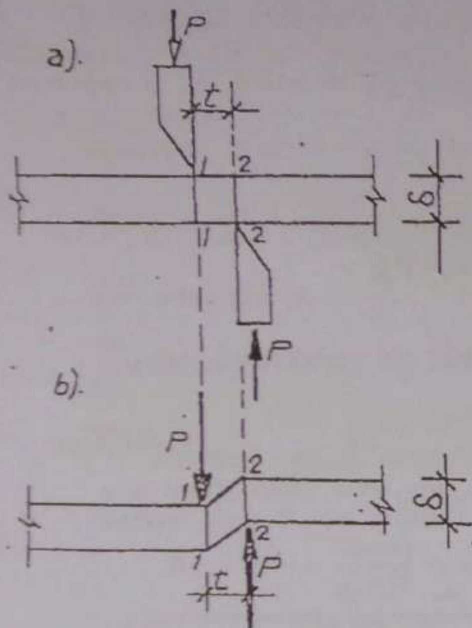


Fig. 10.2

Sub acţiunea forţelor P transmise de lamele acesteia, porţiunea de tablă cuprinsă între secţiunile 1-1 şi 2-2 este solicitată la forfecare pură. Detaşarea părţii din stânga de cea din dreapta are loc prin forfecare după o secţiune aparţinând distanţei t dintre suporturile forţei P (fig. 10.2,b).

În domeniul elementelor de construcţie solicitarea de forfecare este însoţită aproape întotdeauna şi de alte solicitări, în special de încovoiere semnificative în acest sens pot fi considerate îmbinările cu nituri sau cu sudură ale elementelor metalice suprapuse (fig. 10.3).

Cele două piese fixate prin nituire, din figura 10.3, având tendinţa de a se deplasa în sensuri opuse, pe direcţia forţelor P, supun la forfecare secţiunea tijei nitului situată în planul de separaţie dintre ele. Concomitent, în aceeaşi secţiune, ia naştere şi un moment încovoietor M=P·e.

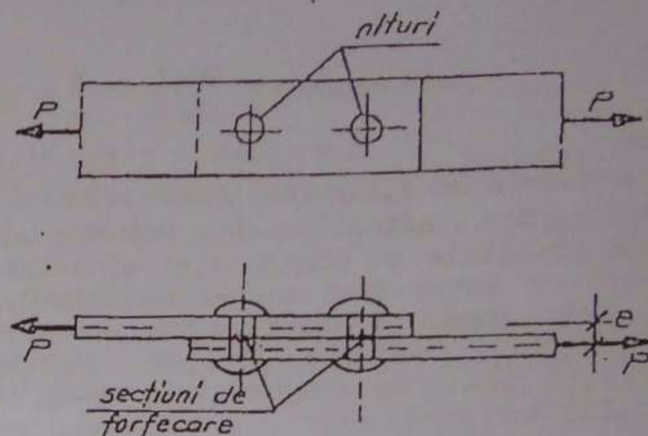


Fig. 10.3

Efectul acestuia este însă redus în comparaţie cu cel al forţei tăietoare T=P, motiv pentru care în calcule este neglijat.

Semnul forţei tăietoare T este cel indicat în aliniatul 6.6, respectiv este pozitiv dacă roteşte tronsonul pe a cărui faţă acţionează în sens orar (fig. 10.1) şi negativ în caz contrar. Aşa cum rezultă din relaţiile (6.6) şi (6.7) forţa tăietoare într-o secţiune reprezintă rezultanta tensiunilor tangenţiale τ din secţiunea respectivă:

$$T = \int_A \tau \, dA \tag{10.1}$$

Convenţional, la solicitarea de forfecare pură tensiunile τ se consideră uniform distribuite pe secţiune (τ = constant) astfel că relaţia (10.1) ia forma $T = \int_A \tau \, dA = \tau \cdot A$, din care se obţine:

$$\tau = \frac{T}{A} \tag{10.2.}$$

în care A reprezintă aria secțiunii forfecate. Ecuația (10.2) reprezintă *formula fundamentală a forfecării pure*. Dacă secțiunea forfecată este raportată la sistemul de axe yoz iar forța tăietoare are în aceasta o direcție oarecare, de componente T_z și T_y, tensiunile tangențiale date de acestea se determină cu relația generală (10.1), care ia forma:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{A}; \ \tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \tag{10.3}$$

Rezultanta acestora este tensiunea totală τ, dată de relația evidentă $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$.

10.2. PRINCIPIUL DUALITĂȚII TENSIUNILOR TANGENȚIALE

Fie o secțiune oarecare printr-o bară în care iau naștere tensiunile τ și o suprafață elementară a ei abcd având dimensiunile $d_y d_z$ (fig. 10.4,a).

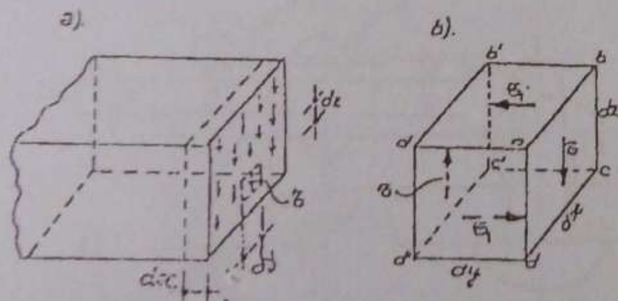


Fig. 10.4

Secționând bara cu un plan normal la distanța dx de secțiune (fig. 10.4,a) și cu 4 plane, două câte două, paralele și normale pe aceeași secțiune, conținând dreptele ab, dc, ad și bc se obține elementul diferențial din figura 10.4,b, având

dimensiunile dxdydz pe a cărui față abcd acționează tensiunile τ (uniform distribuite, reprezentate în figură simbolic prin vectorul τ acționând pe fața abcd).

Pentru ca elementul să se găsească în echilibru (așa cum se afla în bară înainte de detașare), pe fața a'b'c'd' este necesar să introducem o tensiune τ orientată în sens opus. Cele două tensiuni formează însă un cuplu cu tendința de rotire în sens orar.

Pentru asigurarea echilibrului elementului dxdydz apare necesară introducerea de tensiuni τ_1 pe fețele aa'b'b și dd'c'c cu sensuri care să formeze un cuplu egal și opus celui dat de tensiunile τ de pe fețele abcd și a'b'c'd' (fig. 10.4,b). Având în vedere că tensiunile τ și τ_1 sunt uniform distribuite pe fețele în care acționează, momentul lor în raport cu muchia d'c' se va scrie $(\tau \cdot dy \cdot dz)dx-(\tau_1 . dx \cdot dy)dz=0$ sau $\tau dydzdx=\tau_1 dxdydz$. Împărțind relația de mai sus cu dydzdx se obține $\tau = \tau_1$ ce exprimă condensat așa numitul *principiu al dualității tensiunilor tangențiale* τ, având următorul enunț: *în orice punct dintr-un corp, pe două plane ortogonale, tensiunile tangențiale sunt egale și orientate spre sau dinspre muchia lor de intersecție.*

Demonstrat pentru solicitarea de forfecare pură acest principiu este valabil în orice caz de solicitare ce dă naștere la tensiuni tangențiale.

10.3 CALCULE DE REZISTENȚĂ LA FORFECARE PURĂ

Pentru ca bara să nu fie secționată de forța tăietoare T, tensiunile τ produse de aceasta trebuie să fie inferioare rezistenței de calcul la forfecare R_f a materialului. Ținând seama de relația (10.2) condiția de rezistență la forfecare pură enunțată mai sus se exprimă prin relația:

$$\tau = \frac{T}{A} \leq R_f \qquad (10.4)$$

în care A reprezintă aria secțiunii forfecate iar T forța tăietoare de lunecare din aceasta. Calculul de rezistență la forfecare cuprinde verificarea, dimensionarea și stabilirea capacității portante a secțiunilor în care apare forța tăietoare T.

Verificarea revine la testarea inegalității date de relația 9.4. Dacă aceasta este satisfăcută, secțiunea se verifică ceea ce înseamnă că aceasta nu va putea fi tăiată de forța T.

Luând la limită relația (9.4): $\frac{T}{A} = R_f$ se deduce:

- formula pentru *dimensionare*:

$$A_{nec} = \frac{T}{R_f} \qquad (10.5)$$

- formula de calcul a capacității portante la forfecare, a unei secțiuni:

$$T_{cap} = A \cdot R_f \qquad (10.6)$$

Cunoscând aria necesară, dimensiunile secțiunii barei se calculează cu totul identic dimensionării la forța axială (paragraful 9.3,b) egalând aria geometrică cu cea necesară.

10.4 APLICAȚIILE FORFECĂRII. CALCULUL ELEMENTELOR DE PRINDERE A ÎMBINĂRILOR

Considerente dimensionale, constructive, tehnologice, economice etc. impun în numeroase situații realizarea unor elemente de construcție (stâlpi, grinzi etc.) din mai multe piese (formate din profile L, U, platbande etc.) asamblate între ele cu ajutorul unor mijloace auxiliare. O astfel de prindere poartă denumirea de *îmbinare*.

După rolul acestora în elementul de construcție se disting:

- *îmbinări de rezistență* destinate transmiterii anumitor eforturi între piesele situate de o parte și alta a îmbinării.
- *îmbinări de solidarizare* care nu servesc transmiterii de eforturi.

În domeniul construcțiilor metalice îmbinările se realizează uzual cu *nituri* (*șuruburi, buloane, dornuri*) sau cu ajutorul sudurii.

10.4.a Calculul îmbinărilor nituite

Niturile sunt piesele auxiliare ale îmbinărilor dintre două sau mai multe elemente așezate suprapus.

Nitul brut este format dintr-un *cap de așezare* și o tijă cilindrică ușor tronconică. Diametrul acesteia trebuie să fie cu 1mm mai mic decât al găurii în care se introduce iar lungimea ℓ mai mare decât grosimea pieselor îmbinate t, cu o cantitate $\Delta\ell$ din care să poată fie realizat cel de-al doilea „cap" (fig. 10.5).

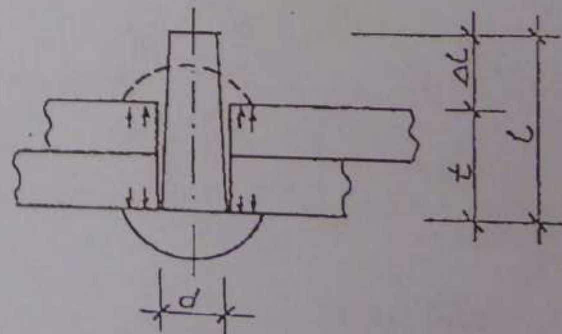


Fig. 10.5

Materialul înglobat trebuie să posede atât caracteristici de rezistență corespunzătoare elementelor îmbinate cât și calități plastice bune. Pentru construcțiile de oțel OL-37 aceste cerințe sunt satisfăcute de niturile realizate din oțel OL-34.

Operația de nituire constă din baterea capătului tijei până la formarea, din lungimea $\Delta\ell$, a celui de-al doilea cap.

Pentru diametre d<10,5mm baterea se face la rece iar pentru diametre superioare la cald. În acest scop nitul este încălzit la 700-800°C după care este introdus în gaura de nit și supus operației de fasonare al celui de-al doilea cap. În timpul baterii, materialul tijei refulează și umple complet gaura de nit iar după răcire tija se contractă producând o bună strângere a pieselor îmbinate. Îmbinările nituite sunt nedemontabile. Deși total diferite ca tehnologie de realizare, îmbinările cu șuruburi și buloane sunt solicitate de eforturi identice și se calculează în același mod cu cele nituite. Să considerăm o îmbinare nituită oarecare (fig. 10.6).

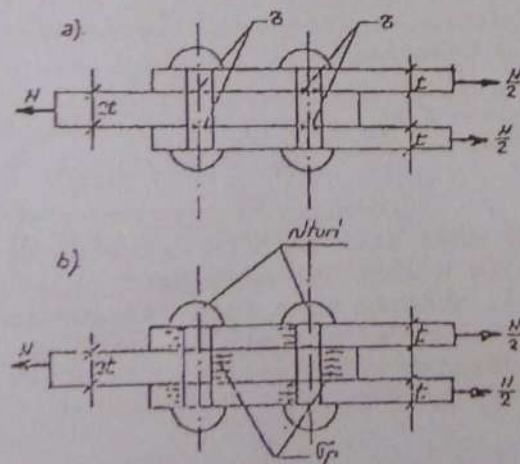


Fig. 10.6

Cum suprafețele de contact dintre piesele 1 și 2 au tendința de a se deplasa în sensuri opuse ele supun tijele niturilor la forfecare (fig. 10.6,a).

În același timp, o parte a suprafețelor laterale a găurilor de nit apăsând pe tije sunt supuse strivirii pereților găurii (fig. 10.6,b).

Dacă eforturile N cresc până la distrugerea îmbinării, cedarea acestora se produce prin forfecarea tijei nitului (când diametrul d este mic în raport cu grosimea t a pieselor) sau prin strivirea pereților găurii de tija nitului (dacă grosimile t ale acestora sunt mici în raport cu diametrul d al tijei niturilor). Evident, la o îmbinare nituită bine alcătuită forfecarea tijei nitului trebuie să se producă concomitent cu strivirea pereților găurii de nit. Pentru a satisface această condiție, în practica îmbinărilor nituite (bulonate) diametrele d se aleg în funcție de grosimile pieselor îmbinate (v. Anexa 9).

Pe baza celor arătate mai sus rezultă că îmbinările nituite trebuiesc calculate la forfecarea tijei niturilor și la strivirea pereților găurii de nit de tijele acestora. Pentru efectuarea calculului la *forfecare* se va observa că:

- aria totală forfecată într-o îmbinare nituită cu „m" secțiuni de forfecare este dată de relația $A = m\cdot\pi d^2/4$, în care d reprezintă diametrul niturilor.
- forța tăietoare T ce revine într-o secțiune de forfecare a tijei nitului este $T = \frac{N}{n}$, în care „n" este numărul de nituri din îmbinare.

Cu precizările de mai sus condiția de rezistență la forfecare, dată de relația (10.4) ia forma:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{N}{n\cdot m\frac{\pi d^2}{4}} \le R_f^n \qquad (10.7)$$

în care $R_f^n = 0,8R$ este rezistența de calcul la forfecare a tijei nitului. Relația (10.7) este folosită la *verificarea* de rezistență a unei îmbinări date. Luată la limită, ea este utilizată pentru:

- calculul numărului de nituri „n" dintr-o îmbinare, din condiția de forfecare:

$$n_f = \frac{N}{m \cdot \frac{\pi d^2}{4} R_f^n} \qquad (10.8)$$

Valoarea rezultată se rotunjește totdeauna în plus la un număr întreg. La dimensionare diametrul nitului se alege conform Anexei 9.

- determinarea capacității portante a unei îmbinări date, din condiția de forfecare

$$N_{f,cap} = m \cdot n \cdot \frac{\pi d^2}{4} R_f^n \qquad (10.9)$$

În limitele unor aproximații de calcul acoperitoare, tensiunile σ_p ce iau naștere pe suprafața de contact tijă nit-piesă îmbinată, se consideră uniform distribuite pe o secțiune diametrală de înălțime egală cu grosimea pieselor îmbinate t (t') care au tendința de a se deplasa pe aceeași direcție.

Notând cu t_{min} grosimea minimă a pachetului menționat în contact cu un singur nit, aria totală minimă din îmbinare supusă la strivire va fi $A_p = n \cdot d \cdot t_{min}$. Tensiunile maxime în această secțiune sunt date de relația (10.1) care ia forma:

$$\sigma_{p,max} = \frac{N}{A_p} = \frac{N}{ndt_{min}}.$$

Pentru ca peretele găurii să nu se strivească, valoarea acesteia trebuie să fie inferioară

tensiunii de calcul la strivire pe gaură a materialului R_p^n.

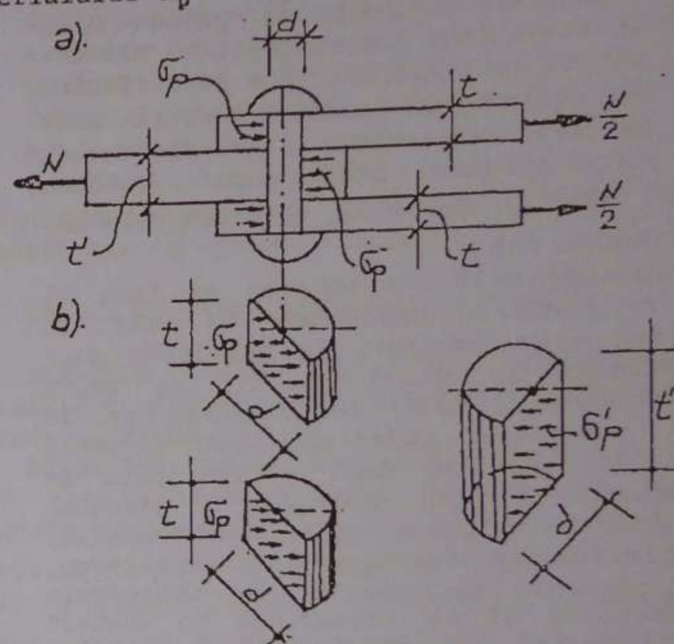


Fig. 10.7

Condensat, condiția de rezistență la strivire se exprimă deci prin relația:

$$\sigma_{p,max} = \frac{N}{ndt_{min}} \le R_p^n, \qquad (10.10)$$

în care $R_p^n = 2R$.

Relația (10.10) este utilizată în calculul de verificare la strivire a unei îmbinări date.

Luată la limită, aceasta este folosită pentru:

- Calculul numărului de nituri din condiția de strivire a pieselor din îmbinare:

$$n_p = \frac{N}{d \cdot R_p^n t_{min}} \qquad (10.11)$$

Valoarea obţinută se rotunjeşte în plus la un număr întreg. Diametrul d se alege conform Anexei 9.

- Determinarea capacităţii portante a unei îmbinări din condiţia de strivire:

$$N_{p,cap} = n_p \cdot d \cdot R_p^n \cdot t_{min} \qquad (10.12)$$

Pentru orice îmbinare nituită bine realizată, relaţiile (10.7) şi (10.10) trebuie să fie îndeplinite concomitent. Ca urmare a acestui fapt, numărul de nituri n şi capacitatea portantă a îmbinării trebuie să satisfacă relaţiile:

$$n = \max\left[n_f; n_p\right] \qquad (10.13)$$

$$N_{cap} = \min\left[N_{f,cap}; N_{p,cap}\right] \qquad (10.14)$$

Observaţie

În numeroase probleme practice interesează numai valorile n şi N_{cap}. Pentru obţinerea lor directă, se calculează *efortul capabil al unui singur nit*, din condiţia de forfecare şi strivire făcând n=1 în relaţiile (10.9) şi (10.12). Se obţine,

$$N_{1f,cap} = m\frac{\pi d^2}{4} R_f^n, \qquad (10.15)$$

$$N_{p,cap} = d \cdot t_{min} \cdot R_p^n. \qquad (10.16)$$

Efortul capabil al nitului va fi:

$$N_{1,cap} = \min\left[N_{1f,cap}; N_{1p,cap}\right].$$

Având valoarea acestuia şi mărimea eforutlui N transmis de îmbinare, din din considerente logice vom avea:

$$n = \frac{N}{N_{1,cap}} \qquad (10.17)$$

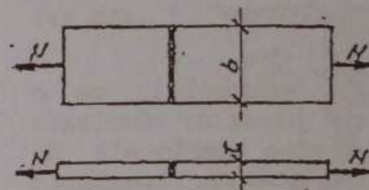
$$N_{cap} = nN_{1,cap} \qquad (10.18)$$

10.4.b Calculul îmbinărilor sudate

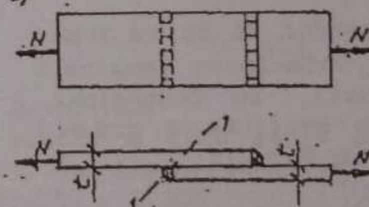
Prin îmbinare sudată se înţelege prinderea a două sau mai multe piese cu ajutorul sudurii. În comparaţie cu cele nituite, îmbinările sudate prezintă avantaje importante:

- elimină slăbirile pieselor îmbinate;
- necesită o tehnologie de execuţie mai simplă şi se efectuează mai repede şi mai uşor;
- realizează o transmitere mai uniformă a eforturilor de la o piesă la alta;
- pot fi realizate îmbinări de orice formă.

a).



b).



c).

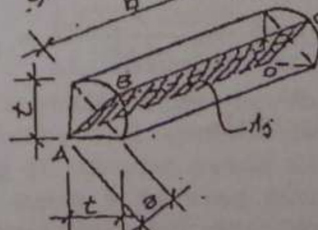


Fig. 10.8

Ca urmare a acestor calităţi, în domeniul construcţiilor metalice, îmbinările sudate sunt utilizate aproape în exclusivitate. Ele nu sunt însă recomandate pentru elemente metalice grele supuse la solicitări dinamice, din cauza apariţiei, în vecinătatea cusăturilor de sudură a unor zone fragile, determinate de răcirea bruscă a sudurii.

După poziţia reciprocă a pieselor îmbinate se disting:

- îmbinări prin cordoane frontale (numite şi de adâncime) atunci când piesele sunt aşezate cap la cap, una în prelungirea celeilalte (fig. 10.8,a);
- îmbinări prin cordoane de colţ (numite şi în relief) când piesele ansamblate sunt suprapuse (fig. 10.8,b)

a. Calculul îmbinărilor prin sudură frontală

Sudurile frontale se consideră a fi solicitate în acelaşi mod ca şi piesele între care sunt executate (la întindere sau compresiune).

Sub acţiunea efortului axial N (fig. 10.8,a) în secţiunile transversale ale sudurii (de arie A_s) iau naştere tensiuni normale σ_s date de relaţia (9.1) care ia forma:

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \qquad (10.19)$$

Deoarece la fiecare capăt al cordonului, pe o lungime egală cu grosimea t a pieselor îmbinate cusăturile de sudură nu satisfac cerinţele de calitate ale unei suduri de rezistenţă, lungimile de calcul ale acestora se consideră a fi ℓ_s = b-2t iar ariile A_s = (b-2t)·t.

Pentru ca un astfel de cordon să nu se rupă, tensiunile σ_s trebuie să fie inferioare tensiunii de calcul la rupere a sudurii, în consecinţă, condiţia de rezistenţă într-o secţiune a sudurii solicitate axial se exprimă prin formula:

$$\sigma_s = \frac{N}{(b-2t)\,t} \le R_s \qquad (10.20)$$

în care R_s = 0,8R la întindere şi R_s = R la compresiune. Relaţia (10.20) este folosită la verificarea, dimensionarea şi stabilirea capacităţii portante a sudurilor frontale.

b. Calculul sudurii de colţ

Sudura de colţ lucrează la forfecare, datorită tendinţei pieselor îmbinate de a se deplasa în sensuri opuse (fig. 10.8,b). Experimental s-a constatat că sudurile de colţ cedează după suprafaţa ABCD (fig. 10.8,c). Deoarece realizarea unei suduri bombate, în arc de cerc, cu o înălţime constantă AB = CD este dificilă, convenţional, secţiunea de forfecare a cordonului se consideră A_s = a (b-2a) în care a = 0,7 t reprezintă înălţimea triunghiului isoscel AEF (fig. 10.8,c). Cordoanle de sudură de colţ sunt solicitate la forfecare de forţe de lunecare T = N, prin urmare, în secţiunile acestora iau naştere tensiuni τ.

Pentru ca sudura să nu se foarfece (taie) este necesar ca aceste tensiuni să fie inferioare tensiunii de calcul a sudurii la forfecare R_f^s = 0,7R. În consecinţă, condiţia de rezistenţă a unui cordon de sudură de colţ se exprimă prin relaţia:

$$\tau = \frac{N}{A_s} \le R_f^s \qquad (10.21)$$

Relaţia (10.21) este folosită la verificarea sudurilor de colţ. Luată la limită: $N / A_s = R_f^s$ ea permite stabilirea formulei pentru dimensionare,

$$A_{s,nec} = \frac{N}{R_f^s} \qquad (10.22)$$

şi pentru determinarea capacităţii portante a sudurilor de colţ

$$N_{s,cap} = A_s \cdot R_f^s \qquad (10.23)$$

Dimensiunile cusăturilor de sudură, la dimensionare, se determină egalând aria geometrică a secţiunii de sudură cu aria necesară dată de

relaţia (10.22). Notând cu a_s grosimea şi cu ℓ_c lungimea cordonului de sudură dimensionat vom avea

$$A_s = a_s \times \ell_c = A_{s,nec} \qquad (10.24)$$

Ecuaţia (10.24) conţine două necunoscute a_s şi ℓ_c. Pentru determinarea acestora se alege una din ele şi apoi se calculează cealaltă. De regulă, se alege $a_s \le 0,7t$, în care t reprezintă grosimea minimă a piesei din îmbinare. Se obţin astfel dimensiunile de calcul ale sudurii.

Întrucât la capete pe lungimi egale cu grosimea cordonului sudura nu satisface cerinţele de calitate ale unei suduri de rezistenţă, lungimile de execuţie ℓ_s numite şi nominale, se iau mai mari cu două grosimi, $\ell_s = \ell_c + 2a_s$.

Observaţie

Din condiţii constructive indiferent de valorile rezultate din calcul, la îmbinările de rezistenţă, dimensiunile cordoanelor de sudură vor satisface următoarele condiţii: $a_s \ge 3$ mm; $\ell_s \ge 6a_s$; $\ell_s \ge 40$ mm.

10.5 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 10.5.1

Diagonala unei grinzi cu zăbrele este solicitată de un efort axial N = 435 kN. Se cere:

- dimensionarea diagonalei din două bare de oţel cornier cu aripi egale (R = 2100 daN/cm);
- calculul numărului de nituri necesar prinderii barelor în nod ($R_f^n = 0,8R$; $R_p^n = 2R$; tg = 15mm)

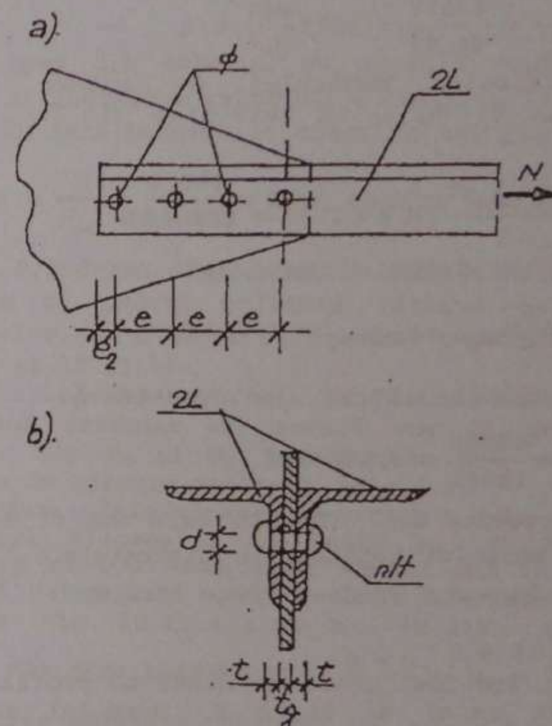


Fig. 10.9

Rezolvare

Pentru a ţine seama de slăbirile produse de nituri, la dimensionare vom folosi formula (9.14), alegând k_s = 1,175.

Vom avea:

$$A_{nec} = \frac{1,175 \times 43500}{2100} = 24,340\ cm^2;\ \frac{1}{2}A_{nec} = 12,70cm^2.$$

Cu această arie se intră în tabelul cu profile laminate oţel cornier cu aripi egale (Anexa 3) şi se aleg 2L 80X80X8 având A= 2· 12,30 cm² =24,60cm²> A_{nec}. Din anexa 9 se aleg nituri cu diametrul de 23 mm şi se verifică apoi secţiunea netă:

$A_{net} = A_{br} - A_{at} = 24,60 - 2\times0,8\times2,3 = 20,92$ cm^2;

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}} = \frac{43500}{20,92} = 2079\frac{daN}{cm^2} < R$$

Pentru calculul numărului de nituri se determină $N_{1f,cap}$ şi $N_{1p,cap}$ cu relaţiile (10.15) şi (10.16):

$$N_{1f,cap} = \frac{2\pi\cdot2,3^2}{4}\cdot0,8\times2100 = 13960\,daN$$

$$N_{1p,cap} = 2,3\times1,5\times4200 = 14490\ daN$$

$$N^n_{cap} = \min\left[N_{1f,cap}; N_{1p,cap}\right] = 13960\ daN$$

Folosind relaţia (10.17), se calculează:

$$n = \frac{43500}{13960} = 3,116\ buc.$$

Se vor prevedea deci 4Ø23 mm care vor fi dispuse (conform normelor tehnice) la distanţele $\ell \geq 3d = 6,9$ cm; $e_1 \geq 2d = 4,6$ cm (vezi fig. 10.9,a)

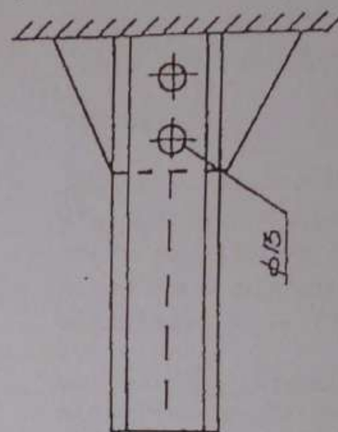
Exemplul 10.5.2

Un pendul vertical realizat dintr-un profil U_8 este solicitat axial de forţa P. Pendulul este prins cu 4 nituri Ø17 mm de un guseu cu grosimea de 8 mm fixat de un tavan (fig. 10.10). Cunoscând R = 2100 daN/cm^2; $R^n_f = 0.8R$; $R^p_n = 2R$ se cere să se determine încărcarea capabilă a pendulului.

Rezolvare

Pendulul poate să-şi piardă capacitatea portantă prin depăşirea rezistenţei de calcul în secţiunile slăbite sau prin cedarea niturilor. Deoarece nu cunoaştem care din cele două situaţii este mai restrictivă, se va calcula câte un P_{cap} corespunzător fiecăreia dintre ele, încărcarea

capabilă fiind valoarea cea mai mică dintre acestea.



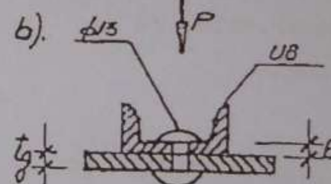


Fig. 10.10

a) $A_{br} = 11,0$ cm^2 (conform Anexei 4);

$A_{at} = 1,3\times0,6 = 0,78$ (conform fig. 10.10,b);

$A_{net} = 11-0,78 = 10,22$ cm^2.

Folosind relaţia (9.15) se obţine

$N_{1,cap} = P_{1,cap} = A_{net}\times R =$

$= 214,62\cdot10^2$ daN $=$

$= 214,62$ kN.

b) Niturile lucrează cu câte o singură secţiune de forfecare (m = 1). Cu relaţiile (10.15) şi (10.16) se calculează:

$$N_{1f,cap} = \frac{1\cdot\pi\cdot1,7^2}{4}\times0,8\times210 = 3813\,daN$$

$$N_{1,cap} = 1,7\times0,6\times4200 = 4284\ daN$$

$$N^n_{cap} = \min\left[N_{1f,cap}; N_{1p,cap}\right] = 3813\ daN$$

Folosind relaţia (10.18) se determină efortul capabil al îmbinării:

$$N_{2,cap} = P_{2,cap} = 4\times38,13kN = 135,52kN$$

$$P_{cap} = \min\{P_{1cap}, P_{2cap}\} = 152,52\ kN.$$

Exemplul 10.5.3

Diagonala unei grinzi cu zăbrele este solicitată la întindere de un efort axial N = 290 kN şi este prinsă cu sudură într-un guseu având grosimea de 10 mm (fig. 10.11). Cunoscând R = 2100 daN/cm^2; R_f^s = 0,7R = 1470 daN/cm^2 se cere:

a) dimensionarea diagonalei din două profile oţel cornier cu aripi egale;

b) dimensionarea cusăturilor de sudură necesare prinderii acesteia în nod.

Rezolvare

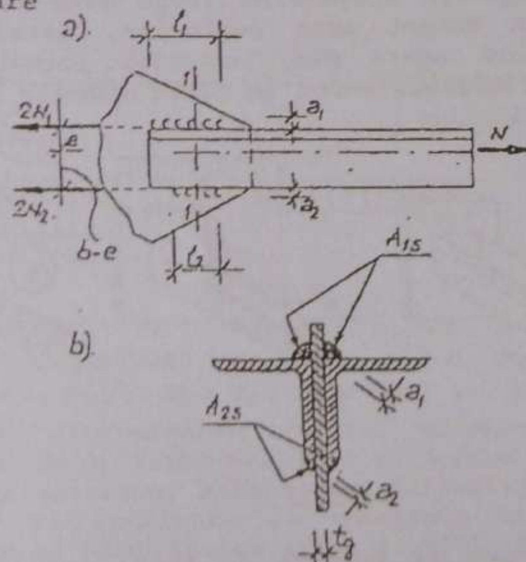


Fig. 10.11

a) Se calculează aria necesară

$$A_{nec} = \frac{N}{R} = \frac{29000}{2100} = 13,810\ \text{cm}^2;\ \frac{1}{2}A_{nec} = 6,905\ \text{cm}$$

Alegem din tabelul cu profile oţel cornier (Anexa 3) 2L60×60×6 având A_{ef} = 2×6,91 = 13,820cm^2 > A_{nec}, în care tensiunile efective vor fi:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}} = \frac{29000}{13,82} = 2098\ \text{daN/cm}^2 < R.$$

b) Prinderea diagonalei în nod se va face cu 4 cordoane de sudură aplicate lateral pe aripile cornierelor, de o parte şi de alta a guseului (fig. 10.11,a şi 10.11,b).

Datorită nesimetriei secţiunii cornierelor, cele două cordoane de sudură vor fi solicitate diferit. Fie N_1 şi N_2 fracţiunile din efortul N preluate de fiecare cusătură de sudură.

Pentru determinarea acestora se exrpimă echilibrul sistemului de forţe N_1, N_2 şi N în raport cu câte o ecuaţie de moment nul în oricare punct al celor două muchii sudate ale cornierelor. Vom avea (fig. 10.11,a): $2N_1 \cdot b - (b-e)N = 0$; $2N_2 \cdot b - eN = 0$, din care rezultă $N_1 = \frac{b-e}{2b}N$; $N_2 = \frac{e}{2b}N$.

Pentru corniera L60×60×6 din Anexa 3 se obţine e = 1,69 cm şi apoi b-e = 6-1,69 = 4,31 cm, cu care $N_1 = \frac{4,31}{12} \times 290 = 104,158\text{kN}$; $N_2 = \frac{1,69}{12} \times 290 = 40,842$.

Eforturile N_1 şi N_2 astfel determinate, solicită cordoanele de sudură la forfecare. Utilizând relaţia (10.22) vom avea:

$$A_{1nec} = \frac{N_1}{R_f^s} = \frac{10415,8}{1470} = 7,086\ \text{cm}^2$$

$$A_{2nec} = \frac{N_2}{R_f^s} = \frac{4084,2}{1470} = 2,778\ \text{cm}^2$$

Din considerente geometrice (fig. 10.11,a) secţiunile celor două cusături de sudură au ariile

$A_{1a} = \ell_{1c} \times a_{1a} = 7,086 \text{ cm}^2$

$A_{2a} = \ell_{2c} \times a_{2a} = 2,778 \text{ cm}^2$

Fiecare din cele două ecuații conține câte două necunoscute. Pentru găsirea acestora se aleg grosimile, din condiția $a_a \le 0,7t$: $a_{1a} \le 0,7 \times 6 = 4,2$ mm. Adoptând $a_{1a} = 4$ mm și $a_{2a} = 3$mm, rezultă lungimile de calcul necesare

$$\ell_{1c} = \frac{7,086}{0,4} = 17,715 \text{ cm}; \ \ell_{2c} = \frac{2,778}{0,3} = 9,26 \text{ cm}.$$

Deoarece la capete cordoanele de sudură nu întrunesc cerințele de calitate ale unei suduri de rezistență pe câte o lungime de a_a, sudurile vor fi executate mai lungi cu această cantitate

$\ell_{1a} = \ell_{1c} + 2a_{1a} = 17,715 + 2 \times 0,4 = 18,515$ cm

$\ell_{2a} = \ell_{2c} + 2a_{2a} = 9,26 + 2 \times 0,3 = 9,86$ cm

Valorile astfel găsite se rotunjesc la număr întreg de mm obținându-se astfel lungimile nominale ale fiecărui cordon $\ell_1 = 185,15$ mm $\cong 186$ mm; $\ell_2 = 98,6$ mm $\cong 100$ mm.

Observație

Normele tehnice privind cusăturile de sudură laterale ale cornierelor permit realizarea cordoanelor de tipul 1 cu o grosime mai mare $a_{1a} \le 0,85$ t. În cazul nostru, $0,85t = 0,85 \times 6 = 5,1$ mm și, deci putem utiliza o grosime $a_{1a} = 5$mm. Dacă se urmărește ca cele două lungimi ℓ_{1a} și ℓ_{2a} să fie cât mai apropiate, grosimea a_{2a} se va lua mai redusă, însă nu mai puțin de valoarea rezultată din calcul sau de 3 mm. La rândul lor, lungimile ℓ_{1a} și ℓ_{2a} nu vor fi mai mici de $6a_a$ și de 40 mm.

CAPITOLUL 11

TORSIUNEA

11.1 DEFINIȚII. EFORTURI ȘI DIAGRAME DE EFORTURI

O bară este supusă la torsiune pură atunci când încărcările exterioare și forțele de legătură produc în secțiunile ei eforturile $M_x = M_t \neq 0$, $N = T = M = 0$.

Cum singurele sisteme de forțe care se reduc numai la un moment sunt cuplurile, rezultă că torsiunea pură apare din încărcări formate din cupluri de forțe acționând în plane normale pe axa barei (fig. 11.1).

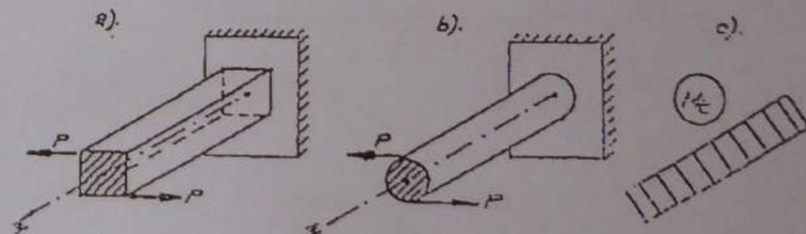


Fig. 11.1

Acestea pot fi cupluri de forțe concentrate sau cupluri de forțe continue, distribuite după anumite legi de variație (fig. 11.2,a).

În cazul barei prezentate în figura (11.2), cuplurile de forțe concentrate acționând după laturile secțiunilor normale C și D și forțele q de

distribuție pe muchiile barei, dau naștere la încărcări de tip momente concentrate ($\mathcal{M}_t$) și respectiv momente distribuite m_t (fig. 11.2,b).

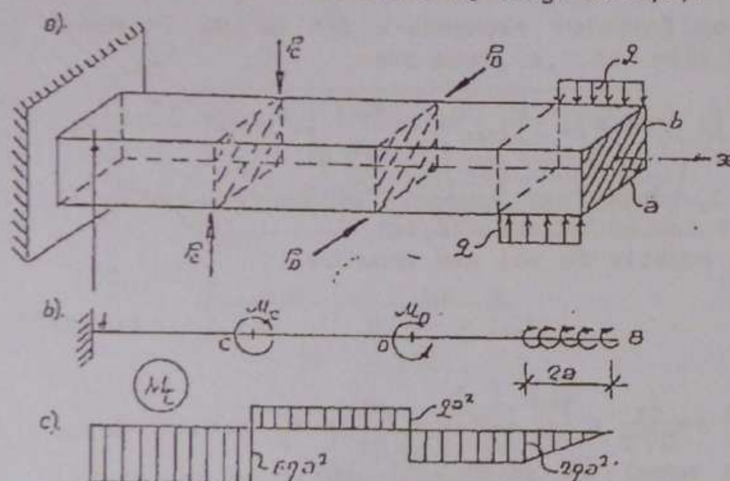


Fig. 11.2

Considerând: $P_D = 5qa$; $P_C = 7qa$; $b = 0{,}6a$, intensitățile acestora vor fi: $m_t = q \cdot a$; $\mathcal{M}_D = P_D \cdot b = 5q \cdot a \cdot 0{,}6a = 3qa^2$; $\mathcal{M}_C = P_C \cdot a = 7q \cdot a \cdot a = 7qa^2$.

Pentru determinarea valorii eforturilor de torsiune M_t în diferite secțiuni și pentru trasarea diagramelor acestora, barele sunt schematizate prin axele lor și încărcate cu momentele cuplurilor concentrate și distribuite (fig. 11.2,b). Regula de semne pentru eforturile M_t, se adoptă arbitrar deoarece comportarea majorității materialelor este aceeași, indiferent dacă rotirea secțiunilor se face într-un sens sau altul. Astfel, considerând pozitive eforturile M_t ce rotesc secțiunea în sensul de rotire al momentului $\mathcal{M}_C$, pentru bara din figura 11.2 vom avea: $M_{t,B} = 0$; $M_{t,E} = 2a \cdot m_t = 2qa^2 = M^{dr}_{t,D}$; $M^{st}_{t,D} = M^{dr}_{t,D} - \mathcal{M}_{t,D} = 2qa^2 - 3qa^2 = -qa^2 = M^{dr}_{t,C}$;

$M^{st}_{t,C} = M^{dr}_{t,C} + \mathcal{M}_{t,C} = -qa^2 + 7qa^2 = 6qa^2 = M_{t,A}$.

Privitor la diagramele momentelor de torsiune (fig. 11.2,c) se impun următoarele precizări:

- Între două secțiuni de acțiune a cuplurilor de forțe concentrate, diagrama M_t este constantă. În aceleași secțiuni, efortul M_t prezintă salturi în sensul încărcărilor $\mathcal{M}_t$ și de mărimea acestora (fig. 11.2,c);
- Dacă m_t este o funcție polinomială de gradul n, momentul de torsiune M_t produs de aceasta va fi reprezentat printr-o funcție de gradul n+1.
- În orice secțiune, eforturile M_t formează pe cele două fețe ale ei, perechi egale și direct opuse, reprezentând efectul tronsonului înlăturat.

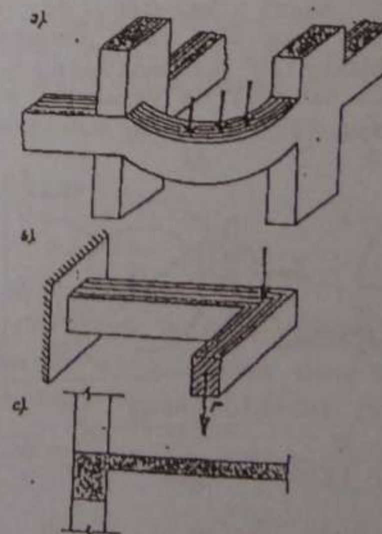


Fig. 11.3

Reprezentativă în domeniul unor organe de maşini (arbori cotiţi, arcuri etc), solicitarea de torsiune este întâlnită şi în domeniul construcţiilor, de regulă combinată cu alte tipuri de solicitări (încovoiere, forfecare etc). Pot fi amintite în acest sens grinzile curbe (fig. 11.3,a), grinzile frânte (fig. 11.3,b), grinzile marginale ale planşeelor (fig. 11.3,c)

11.2 TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII LA TORSIUNEA BARELOR DE SECŢIUNE CIRCULARĂ ŞI INELARĂ

Aşa cum s-a văzut în paragraful 6.2, efortul de torsiune M_t dintr-o secţiune reprezintă suma momentelor forţelor elementare $\tau\, dA$ ($\tau_{xy}dA$, $\tau_{xz}dA$) calculată în centrul de greutate al secţiunii respective (relaţia 6.9).

Cum cele două sisteme sunt echivalente, existenţa unuia nu este posibilă fără prezenţa celuilalt, prin urmare, în secţiunile solicitate la torsiune de eforturi M_t iau naştere tensiuni tangenţiale τ. În cazul barelor de secţiuni circulare şi inelare, aşa cum este demonstrat în [3], [6], [8], tensiunile tangenţiale τ variază liniar fiind zero în centrul de greutate şi maxime τ_{max} în fibrele extreme (fig. 11.4,a).

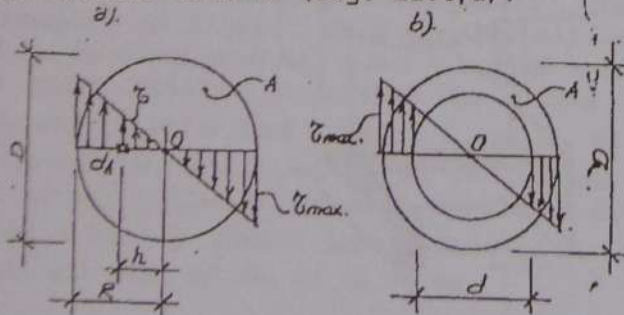


Fig. 11.4

Din considerente geometrice $\dfrac{\tau}{\tau_{max}} = \dfrac{r}{R}$ astfel că se obţine

$$\tau = \frac{r}{R}\tau_{max} \qquad (11.1)$$

Exprimând egalitatea dintre M_t şi suma momentelor forţelor elementare τdA de pe întreaga secţiune (fig. 11.4,a), vom avea:

$$M_t = \int_A r\cdot\tau dA = \int_A r\cdot\frac{r}{R}\tau_{max}dA = \frac{\tau_{max}}{R}\int_A r^2\cdot\tau dA = \frac{\tau_{max}}{R}I_p$$

în care I_p reprezintă momentul de inerţie polar al secţiunii dat de relaţia (8.12).

Din ecuaţia de mai sus rezultă

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p}\cdot R \qquad (11.2)$$

Câtul $\dfrac{I_p}{R} = \dfrac{I_p}{D/2} = \dfrac{\pi D^4}{32}\cdot\dfrac{1}{D/2} = \dfrac{\pi D^3}{32} = W_p$ poartă denumirea de modul de rezistenţă polar al secţiunii circulare. Cu aceasta, valoarea tensiunii maxime date de relaţia (11.2) ia forma

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \qquad (11.3)$$

Relaţia (11.3) stabilită pentru barele de secţiune circulară este aplicabilă şi în cazul barelor de secţiune inelară (fig. 11.4,b). În acest caz:

$$I_p = \frac{\pi}{32}D^4 - \frac{\pi}{32}d^4 = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) \qquad (11.4)$$

$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{2\pi}{32D}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \qquad (11.5)$$

Momentele de torsiune M_t produc rotiri φ ale secțiunilor barei în jurul centrului lor de greutate (fig. 11.5,a).

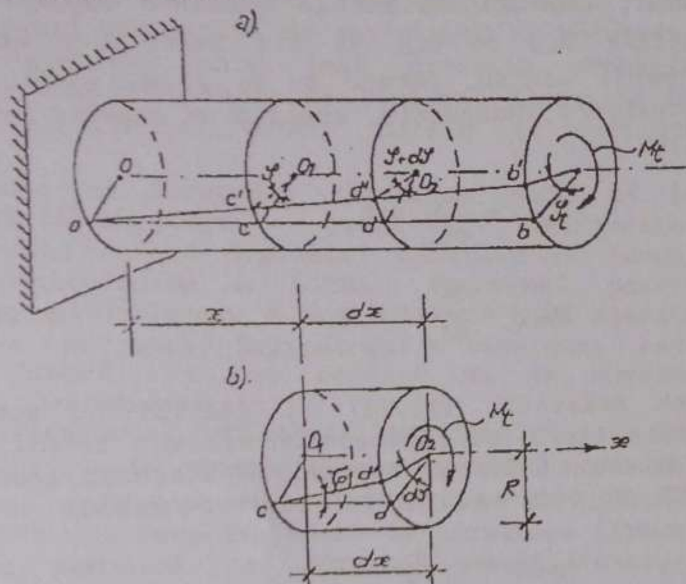


Fig. 11.5

Ca urmare a acestora o fibră a-b de pe conturul exterior inițial dreapta, paralelă cu axa barei și perpendiculară pe secțiunile ei transversale se transformă într-o elice înclinată a-b' (fig. 11.5,a).

Extinzând observația privitoare la fibra a-b la toate fibrele secțiunii, rezultă că rotirile secțiunilor sunt însoțite de modificări ale unghiurilor drepte, prin urmare, la torsiune iau naștere deformații de lunecare $\gamma \neq 0$. Notând cu φ și $\varphi+d\varphi$ rotirile a două secțiuni învecinate, situate la distanța infinitezimală dx una de alta (fig. 11.5,b), rotirea relativă a lor va avea valoarea evidentă $\varphi+d\varphi-\varphi = d\varphi$ căreia îi corespunde lunecarea periferică γ_p.

Unghiurile $d\varphi$ și γ_p (fig. 11.5,b) fiind mici (infinitezimale), din triunghiurile O_2dd'' și cdd'' se obține:

$$dd'' \equiv R tg(d\varphi) = R d\varphi$$

$$tg\gamma_p \equiv \gamma_p = \frac{d \cdot d''}{dx} = R\frac{d\varphi}{dx}$$

Unghiul $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ poartă denumirea de *răsucire (torsiune) specifică* și reprezintă rotirea relativă dintre două secțiuni situate la distanța unitară una de alta.

Cu această notație, expresia lunecării pe contur ia forma:

$$\gamma_p = R \cdot \theta \qquad (11.6)$$

În domeniul elastic de solicitare al materialului, legătura dintre γ și τ este dată de legea lui Hooke, exprimată prin relația (6.13). În baza acesteia și ținând seama de relațiile (11.6) și (11.2), succesiv vom avea: $\gamma_p = \frac{\tau}{G} = \cancel{R}\theta = \frac{M_t}{GI_p}\cancel{R}$,

din care se obține

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \qquad (11.7)$$

Rotirea relativă a două secțiuni situate la distanța ℓ una de alta, între care M_t = constant, se obține prin integrarea relației (11.7). În acest mod vom avea: $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}$; $d\varphi = \frac{M_t}{GI_p}dx$;

$$\varphi_\ell = \int_0^\ell \frac{M_t}{GI_p}dx = \frac{M_t}{GI_p}\int_0^\ell dx = \frac{M_t}{GI_p}x\Big|_0^\ell = \frac{M_t}{GI_p}\ell \qquad (11.8)$$

Deformația specifică θ se măsoară în radiani sau grade pe unități de lungime (m, cm etc). Unghiul φ_ℓ se măsoară în radiani sau grade.

Produsul GI_p din relațiile (11.7) și (11.8) poartă denumirea de ***rigiditate la torsiune*** a secțiunii.

11.3 CALCULUL DE REZISTENȚĂ ȘI RIGIDITATE AL BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ ȘI INELARĂ

O secțiune transversală a unei bare solicitate la torsiune pură nu se va rupe (tăia, forfeca) atâta timp cât tensiunea tangențială maximă ce apare în aceasta este inferioară sau cel mult egală cu rezistența de calcul la forfecare R_f a materialului din care este alcătuită. Ținând seama de relația (11.3), condiția de rezistență la torsiune se va exprima deci prin expresia:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \le R_f \qquad (11.9)$$

Luând inegalitatea de mai sus la limită $\frac{M_t}{W_p} = R_f$ se deduce:

a) Formula pentru ***dimensionare*** la torsiune:

$$W_{p,nec} = \frac{M_t}{R_f} \qquad (11.10)$$

Diametrul sau raza secțiunii se obțin egalând modulul de rezistență geometric W_p, dat de relația (8.17) cu cel necesar. Vom avea $\frac{\pi D^3}{16} = \frac{M_t}{R_f}$ din care,

$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi R_f}}$;

b) Formula de calcul a *capacității portante* a secțiunii la torsiune

$$M_{t,cap} = W_p \cdot R_f \qquad (11.11)$$

Verificarea unei secțiuni la torsiune revine la testarea satisfacerii relației (11.9) în secțiunea respectivă.

Condiția de rigiditate la torsiune impune ca deformațiile θ_{max} și φ_{max} să fie inferioare unor valori maxim admise, notate cu θ_a și φ_a, date în normele tehnice. Matematic, aceasta se exprimă prin relațiile:

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{GI_p} \le \theta_a \qquad (11.12)$$

$$\varphi_{max} = \frac{M_t}{GI_p} \ell \le \varphi_a \qquad (11.13)$$

Dacă relațiile (11.12) și (11.13) nu sunt satisfăcute, bara se redimensionează din condiția de rigiditate, folosind expresiile acestora luate la limită. Se obțin astfel relațiile de calcul

$$I_{p,nec} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a} \qquad (11.14)$$

sau

$$I_{p,nec} = \frac{M_t \ell}{G \cdot \varphi_a} \qquad (11.15)$$

11.4 TORSIUNEA BARELOR DE SECȚIUNE OARECARE

În domeniul construcțiilor elementele structurale cu secțiuni transversale altele decât circulare (dreptunghiulare, pătrate, profile cu pereți subțiri I, U, L etc) sunt numeroase. Multe dintre acestea, în anumite situații de rezemare și

încărcări sunt supuse unor solicitări compuse ce includ şi torsiunea. Cum ponderea ei poate fi însemnată, uneori chiar hotărâtoare, cunoaşterea răspunsului lor la solicitarea de torsiune este indispensabil calculului de rezistenţă al acestora. Această problemă este însă dificilă deoarece modelarea admisă la bara de secţiune circulară nu rămâne valabilă şi pentru barele de secţiune oarecare.

Studii şi încercări riguroase arată că la torsiunea acestora, punctele secţiunilor transversale suferă deplasări diferite în lungul axei longitudinale a barei. Fenomenul poartă denumirea de *deplanare* a secţiunilor. Dacă această deplasare nu este împiedicată, torsiunea este numită *liberă*, în caz contrar ea se numeşte *torsiune împiedicată*.

Împiedicarea deplanării secţiunilor are ca efect apariţia în acestea a unor tensiuni normale σ (pe lângă cele tangenţiale τ) starea de tensiune fiind mult mai complexă decât la torsiunea liberă, când în secţiuni se dezvoltă numai tensiuni tangenţiale τ.

Rezolvarea problemei torsiunii libere a barelor de secţiune oarecare a fost dată pentru prima oară de francezul Barré de Saint-Venant, cu metode ale Teoriei elasticităţii.

Pe baza soluţiilor exacte obţinute cu aceste metode, pentru calculul practic de rezistenţă şi rigiditate la torsiune, pe tipuri de secţiuni, au fost stabilite formule şi relaţii de calcul, analoage cu cele utilizate la barele de secţiune circulară şi folosite în calculele practice inginereşti.

11.4.1 Torsiunea barelor pe secţiune dreptunghiulară

Supusă la torsiune, o bară de secţiune dreptunghiulară (fig. 11.6,a) având trasată o reţea ortogonală pe conturul lateral (simbolizând secţiuni normale şi fibre longitudinale) se deformează ca în figura 11.6,b.

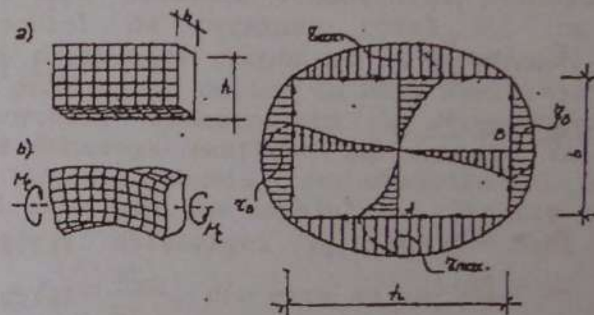


Fig. 11.6

Liniile iniţial drepte şi perpendiculare pe axa barei devin curbe, punând în evidenţă deplanări ale secţiunilor transversale ale barei. La rândul lor, dreptunghiurile de pe suprafaţa laterală a barei nedeformate (fig. 11.6,a) prin răsucire se transformă în paralelograme, deformarea lor fiind cu atât mai pronunţată cu cât acestea sunt mai apropiate de mijlocul feţei laterale (fig. 11.6,b). Deformaţiile celor situate lângă muchii sunt foarte mici, practic neglijabile. Asociind aeste deformaţii legii lui Hooke pentru lunecare şi extrapolând observaţiile privitoare la punctele de pe contur pentru toate punctele secţiunilor transversale, distribuţia tensiunilor tangenţiale τ în secţiune rezultă de formă arătată în fig. 11.6,c.

Soluţiile Teoriei elasticităţii confirmă variaţia (neliniară) arătată şi pun în evidenţă prezenţa de tensiuni maxime τ_{max}, în punctele A situate la mijlocul laturilor lungi, tensiunile mai reduse (τ_0) la mijlocul laturii scurte şi tensiuni $\tau = 0$ la colţuri (fig. 11.6,c).

Cantitativ, acestea, rotirea specifică θ şi rotirea relativă φ se calculează cu relaţiile:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (11.16)$$

$$\tau_0 = \gamma \cdot \tau_{max}, \quad (11.17)$$

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{GI_t}, \quad (11.18)$$

$$\varphi_{max} = \frac{M_t}{GI_t}\ell, \quad (11.19)$$

în care:

$$W_t = \alpha h a^2, \quad (11.20)$$

$$I_t = \beta h b^3, \quad (11.21)$$

poartă denumirea de *modul de rezistenţă la torsiune* şi, respectiv, *moment de de inerţie la torsiune*.

Valorile acestora se calculează cu relaţiile de mai sus în funcţie de dimensiunile secţiunilor (b,h) şi de coeficienţii α, β şi γ daţi în Anexa 10.

Analizând valorile acestora, rezultă că pentru rapoarte $h/b \geq 10$, coeficienţii α şi β iau valoarea $\frac{1}{3}$, astfel că relaţiile (11.20), (11.21) devin:

$$W_t = \frac{1}{3} h b^2, \quad (11.22)$$

$$I_t = \frac{1}{3} h b^3 \quad (11.23)$$

Cu acestea expresiile tensiunilor maxime τ_{max}, a rotirilor specifice θ şi a rotirilor relative φ, date de relaţiile (11.16), (11.18) şi (11.19) devin:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{hb^2}, \quad (11.24)$$

$$\theta = \frac{3M_t}{Ghb^3}, \quad (11.25)$$

$$\varphi = \frac{3M_t\ell}{Ghb^3}. \quad (11.26)$$

11.4.2 Torsiunea barelor cu pereţi subţiri profil deschis

Unele elemente de construcţie au secţiunea transversală sub forma unui contur deschis format din mai multe dreptunghiuri înguste legate între ele rigid (fig. 11.7). Uzual acestea poartă denumirea de *bare cu pereţi subţiri profil deschis*.

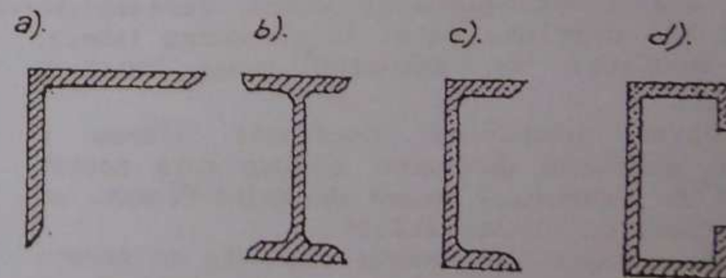


Fig. 11.7

Domeniul acestora cuprinde o gamă largă de profile laminate (I, U, T, L) precum şi profilele din tablă îndoite la rece, unele elemente cu secţiune alcătuită etc. Calculul practic la torsiune al acestora se reduce la cel al barelor de secţiune

dreptunghiulară, considerând că fiecare dreptunghi lucrează independent de celelalte. În limitele acestei aproximații, rigiditatea la torsiune a unei secțiuni compuse din n dreptunghiuri având dimensiunile $b_i \times h_i$ va reprezenta suma rigidităților dreptunghiurilor componente:

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} \beta_i h_i b_i^3 \qquad (11.27)$$

Pentru bara având secțiunea prezentată în figura 11.8, relația (11.27) ia forma:

$$I_t = \sum_{1}^{4} \beta_i h_i b_i^3 = \beta_1 h_1 b_1^3 + \beta_2 h_2 b_2^3 + \beta_3 h_3 b_3^3 + \beta_4 h_4 b_4^3 .$$

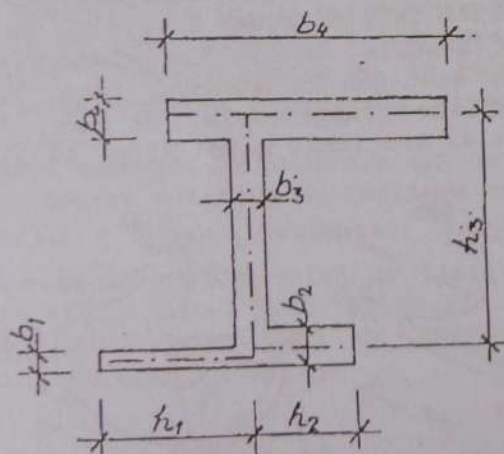


Fig. 11.8

Dacă raportul laturilor $h_i/b_i \geq 10$ la toate dreptunghiurile din componenta secțiunii, în baza relației (11.23), momentul de inerție I_t dat de relația (11.27) devine:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} h_i b_i^3 \qquad (11.28)$$

Cu I_t calculat în baza relațiilor (11.27) sau (11.28), după caz, unghiurile de rotire specifică θ și cele de rotire relativă φ se calculează cu relațiile (11.18) și, respectiv, (11.19).

Pentru determinarea tensiunilor tangențiale în secțiune este necesară cunoașterea fracțiunii M_{ti}, din momentul de torsiune total M_t, ce revine fiecărui dreptunghi component al acesteia. Soluția acestei probleme se obține în baza aceleiași ipoteze a comportării independente a dreptunghiurilor. Deoarece întreaga secțiune se rotește ca un tot unitar (rigid), unghiul de răsucire al întregii secțiuni este egal cu unghiul de răsucire specific al fiecărui dreptunghi θ_i, putem deci scrie: $\theta = \frac{M_t}{GI_p} = \theta_i = \frac{M_{ti}}{GI_{ti}}$, din care se obține:

$$M_{ti} = \frac{I_{ti}}{I_t} \cdot M_t \qquad (11.29)$$

deci momentul de torsiune total se distribuie dreptunghiurilor componente proporțional cu rigiditățile acestora. Conform relației (11.16) $\tau_{i,max} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{M_t}{I_t} \cdot \frac{I_{ti}}{W_{ti}}$, iar pe baza relațiilor (11.22) și (11.23): $\frac{I_{ti}}{W_{ti}} = b_i$. Vom avea deci:

$$\tau_{i,max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_i \qquad (11.30)$$

Se deduce astfel că tensiunea tangențială maximă apare la mijlocul dreptunghiului component având grosimea maximă ($b = b_{max}$):

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_{max} \qquad (11.31)$$

Pe grosimea pereţilor tensiunile tangenţiale τ sunt distribuite liniar şi formează fluxuri ce se închid pe fiecare dreptunghi (fig. 11.9).

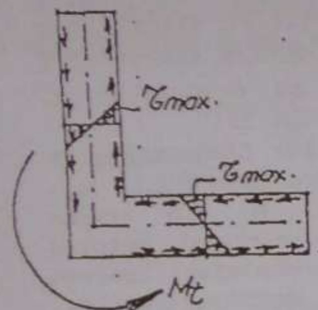


Fig. 11.9

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_2 ;$$

$$\tau_{1,max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_1 ;$$

$$b_2 > b_1$$

Observaţie

În realitate, dreptunghiurile componente ale unei secţiuni nu lucrează independent, prinderea lor rigidă la intersecţii imprimă secţiunii în ansamblul ei, o rigiditate superioară celei calculate cu I_t dat de relaţiile (11.21) şi (11.23).

Pentru a ţine seama de aceasta, momentele de inerţie la torsiune se corectează prin amplificare cu un coeficient supraunitar η ale cărui valori depind de forma profilului

$$I_{t,c} = \eta I_t \qquad (11.32)$$

în care $I_{t,c}$ reprezintă momentul de torsiune corectat iar η un multiplicator având valorile: 1,00 (pentru profile L), 1,12 (pentru profilele U), 1,15 (pentru profile T) şi 1,20 pentru profilele I.

11.4.3 Torsiunea barelor cu pereţi subţiri profil închis - Formulele lui Bredt-Leduc

Analog barelor de secţiune inelară există elemente de structură având secţiunea transversală compusă dint-un contur închis format din dreptunghiuri sau din arce de curbă, altele decât circulare (fig. 11.10)

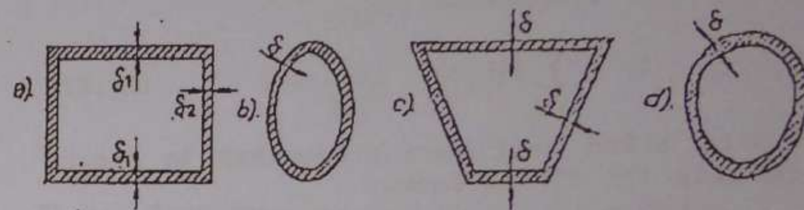


Fig. 11.10

Supuse la torsiune, comportarea acestora este calitativ diferită faţă de aceea a barelor cu perţi subţiri profil deschis, eforturile elementare τdA reducându-se în secţiune la momentul total M_t prin fluxul tensiunilor tangenţiale de pe întreg conturul închis al secţiunii barei (fig. 11.11,b).

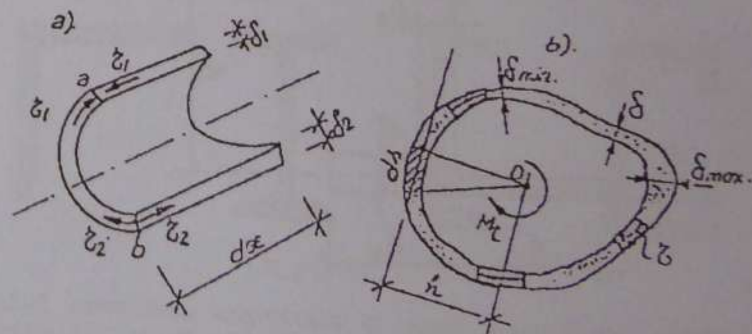


Fig. 11.11

Peretele fiind subţire, se admite că tensiunile tangenţiale τ sunt constante pe grosimea acestuia şi dirijate după linia lui mediană. Detaşând un element din bară de lungime dx (fig. 11.11,a) având grosimea δ_1 în a şi δ_2 în b, şi notând cu τ_1 şi τ_2 tensiunile în cele două puncte din echilibrul acestuia după axa x vom avea:
$-\tau_1\delta_1 + \tau_2\delta_2 = 0$, de unde deducem $\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2$, ceea ce indică faptul că produsul dintre tensiunea tangenţială τ şi grosimea δ, numit *flux al tensiunilor tangenţiale* este constant în lungul conturului secţiunii:

$$\delta \cdot \tau = \text{const.} \qquad (11.33)$$

Exprimând momentul forţelor elementare $\tau dA = \tau\delta ds$ în raport cu un punct arbitrar O vom avea: $dM_t = h \cdot \tau \cdot \delta ds$, unde h este distanţa de la punctul O la tangenta liniei mediane a grosimii elementului ds (fig. 11.11,b).

Însumând momentele elementare dM_t de pe întreg conturul se obţine momentul de torsiune secţional: $M_t = \oint \tau \cdot \delta \cdot h ds = \tau\delta \oint h ds$. Matematic, $\oint h ds = 2\Omega$, în care Ω reprezintă aria închisă de linia mediană a grosimii pereţilor barei (fig. 11.12,a). Cu această notaţie, expresia momentului de torsiune devine $M_t = \tau\delta \cdot 2\Omega$, de unde se obţine

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega\delta} \qquad (11.34)$$

şi

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2\Omega\delta_{min}} \qquad (11.35)$$

Relaţia (11.34) poartă denumirea de prima formulă a lui Bredt-Leduc.

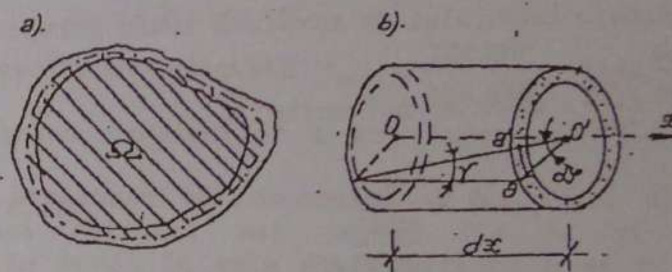


Fig. 11.12

În baza acesteia, tensiunile tangenţiale maxime apar acolo unde grosimea peretelui este minimă (δ_{min}). Ca şi în celelalte cazuri de torsiune studiate, deformaţiile barelor cu pereţii subţiri sunt apreciate prin rotirea specifică θ a secţiunilor transversale. Pentru stabilirea expresiei acesteia se detaşează dintr-o bară de secţiune inelară un element de lungime dx, având secţiunile de capăt rotite cu unghiul $d\varphi$ (fig. 11.12,b). Fibra ba iniţial orizontală (unind punctele a şi b situate la mijlocul grosimii peretelui barei), după deformaţie va ocupa poziţia ba'. Notând cu h distanţele Oa = Oa' = Ob vom avea:

$$tg\gamma \cong \gamma \cong \frac{aa'}{dx} = \frac{h d\varphi}{dx} = \theta \cdot h, \text{ din care:}$$

$$\theta = \frac{\gamma}{h} = \frac{\tau}{Gh} = \frac{M_t}{2\Omega\delta Gh} = \frac{M_t}{2G\Omega\delta h} \cdot \frac{2\pi h}{2\pi h} = \frac{M_t}{4G\Omega \cdot \pi h^2} \cdot \frac{2\pi h}{\delta}.$$

Observând că $\pi h^2 = \Omega$ reprezintă aria suprafeţei închise de linia mediană a grosimii pereţilor barei iar $2\pi h = L$, lungimea aceleiaşi linii, expresia unghiului θ devine:

$$\theta = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \cdot \frac{L}{\delta} \qquad (11.36)$$

Relaţia (11.36) este aplicabilă pentru orice secţiune cu pereţi suţiri de grosime δ constantă.

Dacă peretele secțiunii are grosime variabilă, raportul L/δ din relația (11.36) se înlocuiește cu $\oint\frac{ds}{\delta}$, expresia unghiului de torsiune luând forma:

$\theta = \frac{M_t}{4G\Omega^2}\cdot\oint\frac{ds}{\delta}$, care se mai scrie:

$$\theta = \frac{\frac{M_t}{4G\Omega^2}}{\oint\frac{ds}{\delta}} \qquad (11.37)$$

Relația (11.37) poartă denumirea de formula a doua a lui Bredt-Leduc.

Deși dedusă pe o bară de secțiune inelară, ea este valabilă pentru bare cu pereți subțiri profil închis având secțiunea de orice formă și cu orice variație a grosimii pereților. Expresiile:

$W_t = 2\theta\delta_{min}$, $I_t = \frac{4G\Omega^2}{\oint\frac{ds}{\delta}}$, definesc modulul de rezistență și respectiv momentul de inerție la torsiune al barelor cu pereți subțiri profil închis. Cu aceste notații, expresiile tensiunilor și rotirilor specifice date de relațiile 11.34 și 11.37 iau forma din relațiile (11.16) și (11.18).

Notă

Condițiile de rezistență și rigiditate ale barelor de secțiune dreptunghiulară, a celor cu pereți subțiri profil deschis și închis se exprimă prin aceleași relații cu cele folosite la barele de secțiune circulară (formulele 11.14 și 11.19, în care locul lui I_p este luat de I_t).

11.5 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 11.5.1

O bară încastrată la un capăt este solicitată la capătul liber de un cuplu de două forțe P = 2500 daN având brațul cuplului a = 1,2 m (fig. 11.13).

Cunoscând R_t = 1200 daN/cm²; ℓ = 2,50 m; G = $8\cdot10^5$ daN/cm² se cere:

a) dimensionarea barei cu secțiune circulară;

b) dimensionarea barei cu secțiune inelară având d = 0,8 D;

c) să se precizeze economia de matrial realizată pnetru cele două cazuri de alcătuire;

d) rotirea relativă a secțiunii de capăt a barei.

Pentru fiecare din secțiunile adoptate la punctele a și b se vor trasa diagramele de tensiuni τ în secțiune.

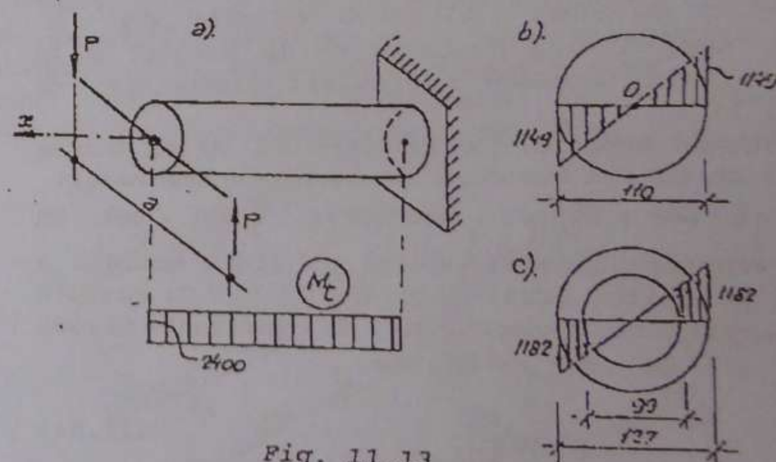


Fig. 11.13

Rezolvare

a) M_t = 2500x1,2 = 3000 daNm. Folosind formula (11.10) vom avea: $W_{p,nec} = \frac{300000}{1200} = 250\ cm^3$; pentru

secţiunea circulară (fig. 11.13,b) $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

Punând condiţia $W_p = W_{p,nec}$ vom avea: $\frac{\pi d^3}{16} = 250$ din care se obţine $d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 250}{\pi}} = 10,839$ cm. Se adoptă d = 11 cm = 110 mm; pentru care

$$I_p = \frac{\pi \times 11^4}{32} = 1437 \ cm^4; \quad W_p = \frac{\pi \times 11^3}{16} = 261 cm^3;$$

$$\tau_{ef} = \frac{300000}{261} = 1149 \, daN / cm^2 < R_f .$$

Diagrama τ în secţiunea circulară este prezentată în figura 11.13,b.

b) Pentru secţiunea inelară (fig. 11.13,c) modulul de rezistenţă polar geometric este dat de relaţia (11.5): $W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$. Cu d= 0,8 D, vom avea: $\frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{0,8D}{D}\right)^4\right] = W_{p,nec} = 250 \ cm^3$ din care rezultă $\frac{0,5904}{16} \cdot \pi D^3 = 250 \ cm^3$ şi apoi D = 12,92 cm şi d = 0,8x12,92 = 10,34 cm; D-d = 2,52 cm. Cu D rezultat din calcul se intră în tabelul din Anexa 7 şi se alege secţiunea care să aibă $W_p \geq W_{p,nec} = 250 \ cm^3$. Alegând ţeava având D = 127 mm cu grosimea peretelui de 14 mm, astfel că d = 127 - 28 = 99 mm, rezultă:

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = 1610 \ cm^4;$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot 12,7^3}{12}\left[1 - \left(\frac{9,9}{12,7}\right)^4\right] = 253,685 \ cm^3;$$

$$W_p > W_{p,nec};$$

Pentru secţiunea adoptată $\tau_{max} = \frac{300000}{253,685} = 1182 \frac{daN}{cm^2}$ iar diagrama tensiunilor τ are forma din figura 11.13,c.

c) secţiunea mai economică va fi aceea care înglobează material mai puţin. Fie A_a şi A_b secţiunile barei în cele două variante a şi b de alcătuire

$$A_a = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} = 95 \ cm^2;$$

$$A_b = \frac{\pi}{4}\left(12,7^2 - 9,9^2\right) = 49,70 \ cm^2$$

Prin utilizarea secţiunii inelare rezultă o economie $e = \left(1 - \frac{A_b}{A_a}\right) \times 100 = 47,684 \ \%$.

d) Pentru cele două secţiuni, circulară şi inelară, cu relaţia (11.8) se obţin:

$$\varphi_a = \frac{300000 \times 250}{1437 \times 8 \times 10^5} = 6,254 \times 10^{-2} \ rad$$

$$\varphi_a = \frac{300000 \times 250}{1610 \times 8 \times 10^5} = 5,823 \times 10^{-2} \ rad$$

Exemplul 11.5.2

O bară de secţiune dreptunghiulară având dimensiunea secţiunii transversale de 2X6cm este solicitată la torsiune de un cuplu de moment M_t = 40 daNm (fig. 11.14). Cunoscând: G = 8×10^5daN/cm²; R_f = 650 daN/cm².

Se cere:

a) verificarea de rezistenţă a barei şi diagrama tensiunilor τ după axele secţiunii;

b) unghiul de torsiune al secţiunii de capăt a barei.

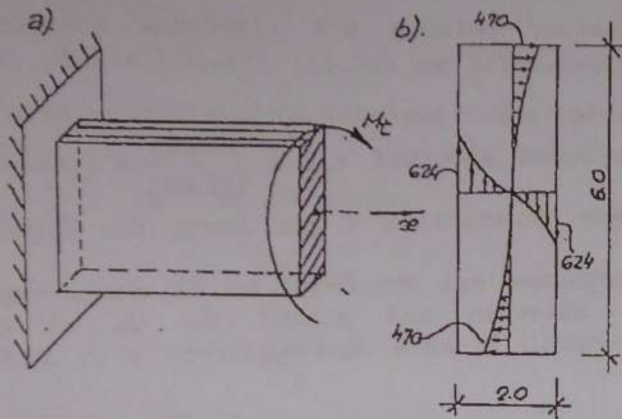


Fig. 11.14

Rezolvare

a) Conform §11.4.1, la bara de secţiune dreptunghiulară supusă la torsiune pură, tensiunea maximă apare la mijlocul laturii lungi şi este dată de relaţia (11.16). Din Anexa 10, pentru $\frac{h}{b} = \frac{6}{2} = 3$, rezultă $\alpha = 0,267$, $\beta = 0,263$, $\gamma = 0,753$ după care, cu relaţiile (11.20) şi (11.21) se calculează

$$W_t = \alpha h b^2 = 0,267 \times 6 \times 2^2 = 6,408\ cm^3;$$

$$I_t = \beta h b^3 = 0,263 \times 6 \times 2^3 = 12,624\ cm^3.$$

Vom avea:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{4000}{6,408} = 624 daN / cm^2$$

La mijlocul laturii scurte, tensiunea τ este dată de relaţia (11.17) $\tau_1 = \gamma\tau_{max} = 0,753 \times 624 = 469,872\ daN/cm^2 \cong 470 daN/cm^2$. Diagrama tensiunilor τ este arătată în figura 11.14,b;

b) Folosind relaţia (11.19) $\varphi_t = \frac{4000 \times 200}{8 \times 10^5 \times 12,624} = 7,921 \cdot 10^{-2}\ rad.$

Exemplul 11.5.3

O bară solicitată la torsiune are secţiunea transversală de forma şi dimensiunile din figura 11.15,a. Cunoscând $R_t = 1200\ daN/cm^2$ se cere să se determine:

a) Momentul capabil la torsiune al barei;

b) Distribuţia tensiunilor τ în tălpi şi pe inimă.

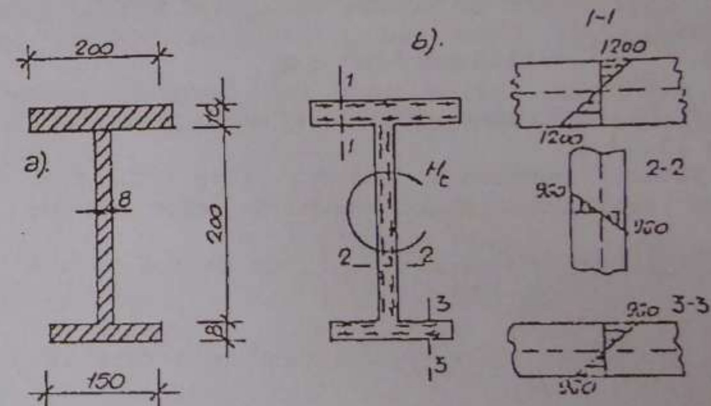


Fig. 11.15

Rezolvare

a) Conform §11.4.2 tensiunea tangenţială maximă apare la mijlocul laturii dreptunghiului de grosime maximă. Folosind relaţia (11.30) şi punând condiţia de rezistenţă în tensiuni $\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} b_{max} \le R_t$, la limită $M_{t,cap} = \frac{I_t}{b_{max}} R_t$, în care $b_{max} = 10$ mm iar I_t este dat de relaţia (11.28).

$$I_t=\frac{1}{3}\sum_{1}^{3} b_i^3h_i=\frac{1}{3}\left(20\times1^3+20\times0,8^3+15\times0,8^3\right)=12,64\ cm^4;$$

$$M_{t,cap}=\frac{12,64}{1,0}\times1200=1,517\cdot10^4 daNcm=1,517 kNm.$$

b) Tensiunile efective maxime la mijlocul tălpilor şi inimii secţiunii se calculează cu relaţia (11.30)

- în talpa superioară $\tau_{max}=\frac{15170}{12,64}\times1=1200\ daN/cm^2$
- în talpa inferioară $\tau_{max}=\frac{15170}{12,64}\times0,8=960\ daN/cm^2$
- în inimă - idem talpa inferioară

Diagrama tensiunilor şi fluxul acesteia este arătat în figura 11.15,b.

Exemplul 12.5.4

O bară de secţiune chesonată dată este solicitată la capete de un cuplu $\mathcal{M}_t$ = 832,50 kNm (fig. 11.16,a). l = 2.20 m; δ_1 = 5 mm; δ_2 = 7,5 mm; b = 80 mm; h = 100 mm; R_t = 1200 daN/cm²; G = $8\cdot10^5$daN/cm².

Se cere:

a) Verificarea de rezistenţă a barei şi fluxul tensiunilor τ pe laturile secţiunii;

b) Se consideră o tăietură longitudinală în bară (fig. 11.16,e). Să se calculeze momentul capabil al barei astfel rezutate şi să se compare cu momentul capabil al barei iniţiale. Se va stabili care din cele două variante de alcătuire este mai economică;

c) Unghiul de torsiune specifică al barei cu secţiunea profil închis şi rotirea secţiunii de capăt.

Rezolvare

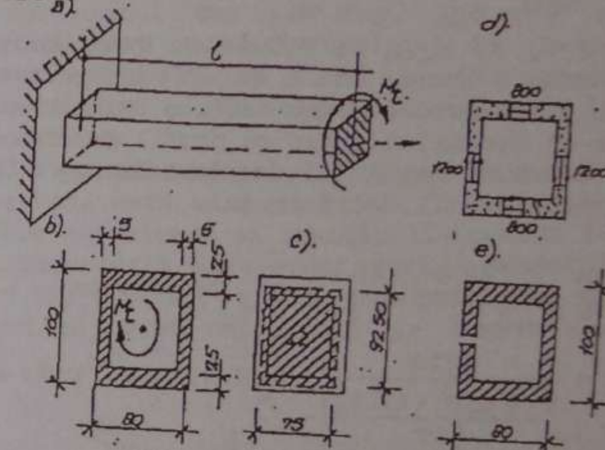


Fig. 11.16

a) Tensiunea maximă, conform §11.4.3 ia naştere în peretele secţiunii cu grosimea cea mai mică şi se calculează cu relaţia (11.35) în care $\delta_{min}=\delta_1$ = 5 mm = 0,5 cm, Ω = 7,5 ×9,25 = 69,375 cm² (a se vedea figura 11.16,c)

Cu acestea $\tau_{max}=\frac{83250}{2\times69,375\times0,5}=1200daN/cm^2$

$\tau_{max}=R_t$ (secţiunea se verifică)

Pe latura secţiunii cu grosimea δ_2, tensiunile τ se determină cu relaţia (11.34)

$$\tau=\frac{M_t}{2\Omega\delta_2}=\frac{83250}{2\times69,375\times0,75}=800daN/cm^2$$

Fluxul tensiunilor pe secţiune este arătat în figura 11.16,d.

b) Practicând tăietura indicată în figura 11.16,e, bara devine cu pereţi subţiri profil deschis, pentru care

$$I_t=\frac{1}{3}\sum_{1}^{5} h_ib_i^3=\frac{1}{3}\left(9,25\times0,5^3+2\times\frac{9,25}{2}\times0,5^3+2\times7,5\times0,75^3\right)=2,88\ cm^4$$

Punând condiția de rezistență $\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} b_{max} \leq R_f$

rezultă $M_{t,cap} = \frac{I_t \cdot R_f}{b_{max}} = \frac{2,88 \times 1200}{0,75} = 4608\,\text{daNcm} = 46,08\,\text{kNcm}$.

Comparând M_t cu $M_{t,cap}$ se deduce că bara cu pereți subțiri profil închis are o capacitate portantă la torsiune de 18 ori mai mare decât o bară de aceeași secțiune și dimensiuni, dar cu profil deschis.

c) Calculul unghiului de răsucire specifică se face cu relația (11.37) în care:

$$\int \frac{ds}{\delta} = 2\left(\frac{92,5}{5} + \frac{75}{7,5}\right) = 57.$$ Cu aceasta

$$\theta = \frac{83250}{\frac{4 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 69,375^2}{57}} = 21,375 \times 10^{-3}\,\text{rad/cm}$$

CAPITOLUL 12

ÎNCOVOIEREA PLANĂ PURĂ A BAREI DREPTE

12.1 GENERALITĂȚI ȘI DEFINIȚII

Numeroase construcții au în componența structurală o serie de bare, numite generic grinzi încărcate cu forțe acționând normal pe axa acestora.

De regulă, secțiunile lor transversale prezintă simetrie dublă (fig. 12.1, a, b, c) sau simplă (fig. 12.1, d, e).

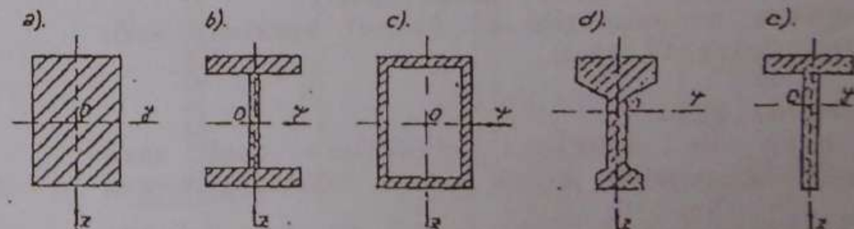


Fig. 12.1

Așa cum s-a văzut în capitolul 8, orice axă de simetrie a unei secțiuni reprezintă o axă principală de inerție.

Planele longitudinale ale unei grinzi ce conține axele principale de inerție ale secțiunilor transversale poartă denumirea de plane principale.

Când toate încărcările exterioare sunt conținute într-un plan principal, axa grinzii, inițial dreaptă, se deformează transformându-se într-o curbă plană conținută în planul încărcării.

În acest caz solicitarea se numeşte de încovoiere plană simplă.

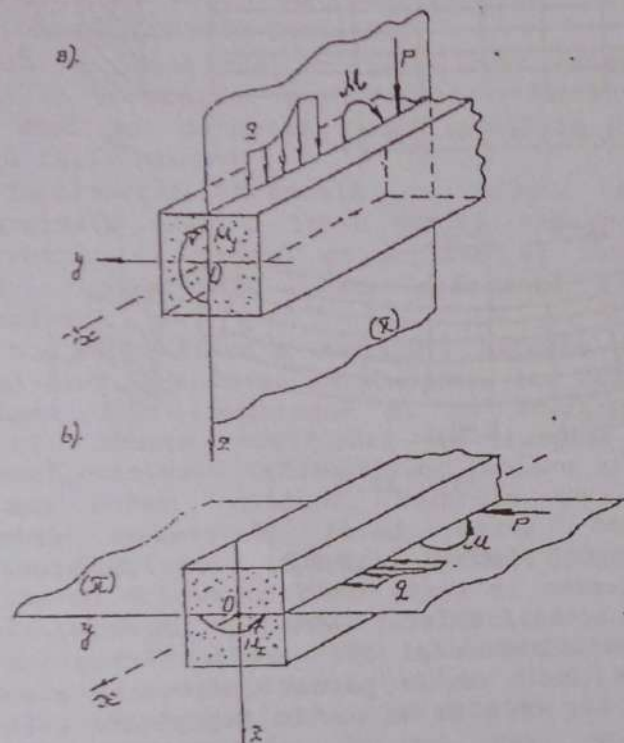


Fig. 12.2

Pentru exemplificare se consideră grinzile din figurile 12.2. Forţele exterioare şi reacţiunile ce acţionează în planul vertical de simetrie Oxz produc în secţiunile barei momente M_y (M_z=0) al căror efect mecanic este rotirea secţiunilor în jurul axei y (fig. 12.2, a).

Dacă însă încărcările sunt aplicate în cel de-al doilea plan principal xOy (fig. 12.2, b), ele produc în secţiuni momente încovoietoare M_z (M_y=0) ce au tendinţa de rotire a secţiunilor barei în jurul axei z. Întrucât studiul încovoierii plane simple se face la fel, indiferent dacă solicitarea se produce în planul Oxz sau Oxy, în cele ce urmează vom considera cazul încovoierii în planul vertical Oxz, urmând ca în final să transpunem rezultatele obţinute şi în cazul încovoierii în planul orizontal Oxy.

Dacă pe o grindă sau pe o porţiune de grindă greutatea acesteia este mică şi poate fi neglijată iar încărcările exterioare şi reacţiunile produc în secţiunile transversale un singur efort - momentul încovoietor M, (M_y sau M_z), grinda sau porţiunea de grindă respectivă este solicitată la încovoiere pură.

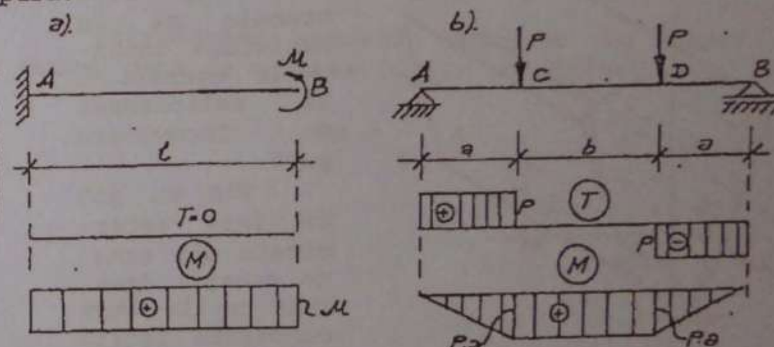


Fig. 12.3

În figura 12.3 sunt prezentate două tipuri de astfel de grinzi şi încărcări ce conduc la solicitarea de încovoiere pură (M_y≠0, T=0) pe toată deschiderea sau numai pe anumite porţiuni a ei (acolo unde T=0).

12.2 TENSIUNI NORMALE LA ÎNCOVOIEREA PURĂ. FORMULA LUI NAVIER

Aşa cum s-a văzut în capitolul 6, existenţa unui moment încovoietor M într-o secţiune este legată de prezenţa în secţiunea respectivă a tensiunilor normale σ (fig. 6.5,a şi b).

În cazul particular al încovoierii pure în planul xOz (fig. 12.4) eforturile secţionale au valorile $N=M_x=0$, $M_y\neq0$. Introducând aceste mărimi în relaţiile (6.4), (6.5) şi (6.6) se obţin:

$$\int_A \sigma dA = 0 \qquad (12.1,a)$$

$$\int_A \sigma y dA = 0 \qquad (12.1,b)$$

$$\int_A \sigma z dA = M_y \qquad (12.1,c)$$

ce exprimă condiţiile pe care trebuie să le satisfacă tensiunile normale σ la solicitarea de încovoiere pură.

Ele nu pot fi însă determinate din aceste ecuaţii deoarece nu le sunt cunoscute legile de variaţie pe secţiune.

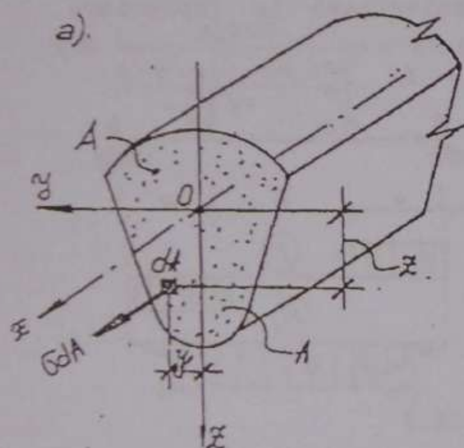


Fig. 12.4

Pentru obţinerea acestora se apelează la studiul deformaţiilor barei, produse de solicitarea studiată. În acest scop, pe conturul ei exterior se trasează un caroiaj rectangular, format din generatoare paralele cu axa longitudinală a barei (simbolizând fibre longitudinale periferice) şi segmente echidistanţate normale pe generatoare,

formând contururi închise, simbolizând secţiuni plane şi normale pe bara nedeformată (fig. 12.5, a).

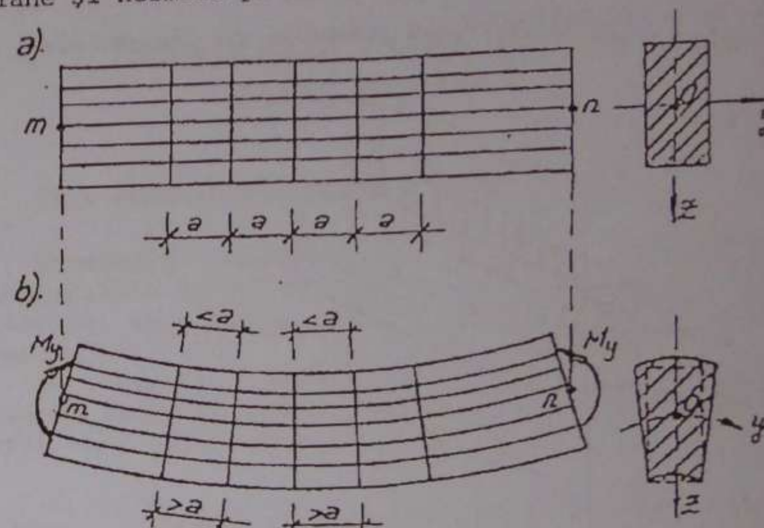


Fig. 12.5

Analizând forma barei deformate prin încovoiere pură (fig. 12.5,b) se constată următoarele:

- generatoarele, iniţial drepte, au devenit curbe modificându-şi în acelaşi timp şi lungimea; cele de la partea inferioară s-au alungit iar cele de la partea superioară s-au scurtat.

Trecerea de la generatoarele întinse la cele comprimate determină un punct situat pe o fibră a secţiunii care deşi se curbează, nu-şi modifică lungimea, numită *fibră neutră*.

- segmentele normale pe generatoare înainte de deformare rămân tot drepte şi tot normale pe generatoarele curbate, astfel că, unghiurile drepte ale caroiajului se păstrează.

Extrapolând configurația deformată a fibrelor de pe conturul barei la toate fibrele secțiunii se desprind următoarele concluzii:

a. Pe înălțimea secțiunii unei grinzi solicitate la încovoiere pură există o fâșie de fibre care deși se curbează nu-și modifică lungimea, numită *fâșie neutră*.

Intersecția acesteia cu planul secțiunii transversale este o linie numită *axă neutră* iar intersecția cu planul de acțiune al forțelor, o curbă reprezentând *axa deformată a barei încovoiate*.

b. Toate fibrele secțiunii situate sub fâșia neutră sunt întinse și se alungesc, iar cele situate deasupra sunt comprimate și se scurtează (fig. 12.5,b). Aceste modificări de lungime pun în evidență existența deformațiilor liniare ε, paralele cu axa barei, evident, diferite pe înălțimea secțiunii: $\varepsilon_x \neq 0$ (12.2).

c. Secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformare rămân plane și normale pe axa barei și după deformare (valabilitatea ipotezei Bernoulli). Rezultă astfel că unghiurile inițial drepte ale caroiajului (fig. 12.5,a) nu se modifică, în consecință: $\gamma_{xy}=0$ (12.3).

Cu observațiile de mai sus, un element infinitezimal de lungime dx delimitat prin două secțiuni normale 1-1 și 2-2 (fig. 12.6,a), prin încovoierea barei se deformează ca în figura 12.6,b. Comparând cele două configurații ale acestuia (nedeformată și deformată - fig. 12.6) se constată următoarele:

- secțiunile 1-1 și 2-2 se rotesc în pozițiile 1'-1' și 2'-2' ce formează între ele unghiul elementar $d\varphi$.
- toate fibrele secțiunii, inițial drepte, se curbează. Cele din fâșia neutră își păstrează lungimea nemodificată. Notând cu ρ raza lor de curbură vom avea deci: $O_1'O_2'=\rho d\varphi=O_1O_2=AB=dx$.

- o fibră arbitrară AB situată la distanța z de fâșia neutră, prin încovoiere, își modifică lungimea și devine curbă în poziția A'B'. Din considerente geometrice aceasta va avea raza de curbură $(\rho+z)$, lungimea $A'B'=(\rho+z)d\varphi$ și deformația absolută $\Delta_{AB} = A'B'-AB = (\rho+z)d\varphi-\rho d\varphi = zd\varphi$.

Având deformația absolută a fibrelor secțiunii, în baza relației (6.10), deformațiile specifice liniare ale acestora vor fi:

$$\varepsilon = \frac{\Delta_{AB}}{AB} = \frac{zd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho} \qquad (12.4)$$

Introducând această expresie în legea lui Hooke, dată de relația (6.12) se obține:

$$\sigma = \frac{E}{\rho}\cdot z \qquad (12.5)$$

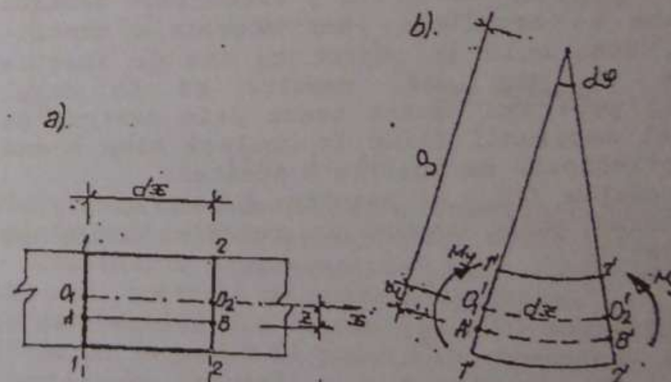


Fig. 12.6

Deoarece modulul de elasticitate E și raza de curbură ρ nu depind de poziția fibrei în secțiune, raportul lor reprezintă o constantă și în consecință, în baza relației (12.5), tensiunile normale σ pe înălțimea secțiunii variază liniar, fiind direct proporționale cu distanța z a fibrei de axă neutră.

Înlocuind expresia tensiunii o dată de relația (12.5) în relațiile (12.1) se obțin:

$$\frac{E}{\rho}\int_A z\,dA = \frac{E}{\rho}\cdot S_y = 0 \qquad (12.6,a)$$

$$\frac{E}{\rho}\int_A y\cdot z\,dA = \frac{E}{\rho}\cdot I_{yz} = 0 \qquad (12.6,b)$$

$$\frac{E}{\rho}\int_A z^2 dA = \frac{E}{\rho}\cdot I_y = M_y \qquad (12.6,c)$$

în care S_y, I_{yz}, I_y au semnificațiile de moment static al secțiunii în raport cu axa neutră, moment de inerție centrifugal față de axele Oy și Oz și respectiv de moment de inerție axial al întregii secțiuni în raport cu axa Oy.

Deoarece raportul E/ρ este diferit de zero (bara fiind încovoiată), ecuațiile (12.6,a) și (12.6,b) pot fi satisfăcute când $S_y = I_{xy} = 0$.

Având în vedere că momentele statice S_y sunt egale cu zero numai edacă axa y trece prin centrul de greutate al secțiunii, iar momentele centrifugale I_{xy} sunt nule în raport cu axe de inerție principale (v. cap. 8), rezultă că în cazul încovoierii pure axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii fiind în același timp o axă centrală principală de inerție a acesteia.

Din relația (12.6.c) rezultă: $E/\rho = M_y/I_y$

Înlocuind acest raport în relația (12.5) se obține relația:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}\cdot z \qquad (12.7)$$

numită *formula fundamentală a încovoierii plane pure*, cunoscută și sub denumirea de *formula lui Navier*.

Conform acesteia, tensiunile normale o dintr-o secțiune a unei grinzi solicitate la încovoiere pură sunt proporționale cu momentul încovoietor M_y din secțiunea respectivă, cu distanțele z la axa neutră Oy și sunt invers proporționale cu momentul de inerție I_y al secțiunii în raport cu aceeași axă neutră.

Ele variază deci liniar, având valoarea zero în axa neutră și valori maxime și minime în fibrele extreme ale secțiunii (fig. 12.7).

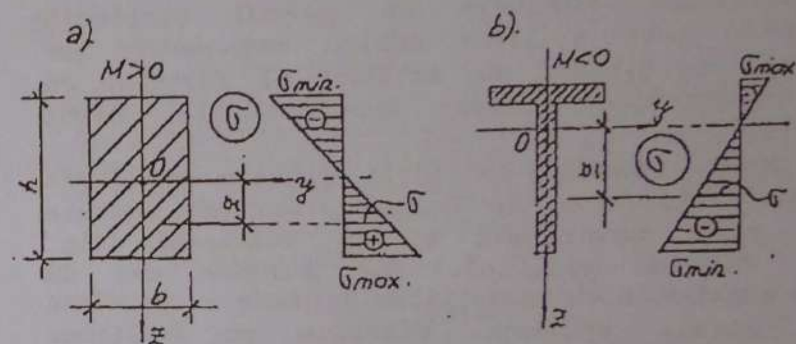


Fig. 12.7

Pentru secțiunea din figura (12.7,a) solicitată de momentul încovoietor $M_y>0$ tensiunile extreme au valorile: $\sigma_{max/min} = M_y/I_y\cdot(\pm h/2)$. În cazul secțiunii din figura 12.7.b, solicitate de momentul $M_y<0$ ele se exprimă prin relațiile: $\sigma_{max} = M_y/I_y\cdot(-h_2)$; $\sigma_{min} = M_y/I_y\cdot(+h_1)$.

Reprezentând tensiunile σ din fiecare punct al secțiunii prin vectori, capetele acestora se vor găsi într-un plan ce interesectează planul secțiunii normale după axa neutră, determinând cu intersecțiile fețelor de sus și de jos ale barei două prisme triunghiulare ce se constituie în volumul tensiunilor σ din secțiune (fig. 12.8).

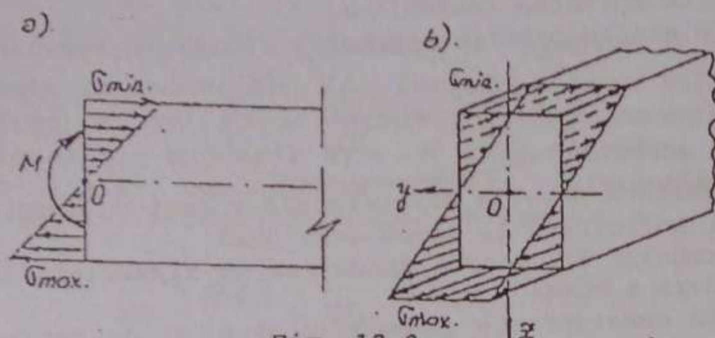


Fig. 12.8

Dacă încovoierea se produce în planul xOy (fig. 13.2,b), expresia tensiunilor σ dată de formula lui Navier are forma:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \qquad (12.7')$$

12.3 DEFORMAŢIILE BARELOR SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

Prin încovoiere o bară dreaptă se deformează şi ia forma de bară curbă (fig. 12.9,b).

O secţiune 1-1, plană şi normală pe axa ei nedeformată (fig. 12.9,a) se roteşte cu un unghi φ în poziţia 1'-1', rămânînd plană şi normală pe axa deformată (fig. 12.9,b). În acelaşi timp, un punct curent m al axei nedeformate se deplasează în poziţia m" parcurgând depasarea absolută mm". Întrucât componenta acesteia după axa barei, notată cu u(x) este mică, practic neglijabilă, deplasarea reală mm" este aproximată prin componenta transversală mm', normală pe axa nedeformată, notată cu w(x), numită *săgeată* (fig. 12.9,c).

Uzual, în studiul deformaţiilor la încovoiere barele sunt schematizate prin axele lor longitudinale (fig. 12.9,c), considerându-se că

toate punctele unei secţiuni normale au aceeaşi săgeată ca şi centrul lor de greutate.

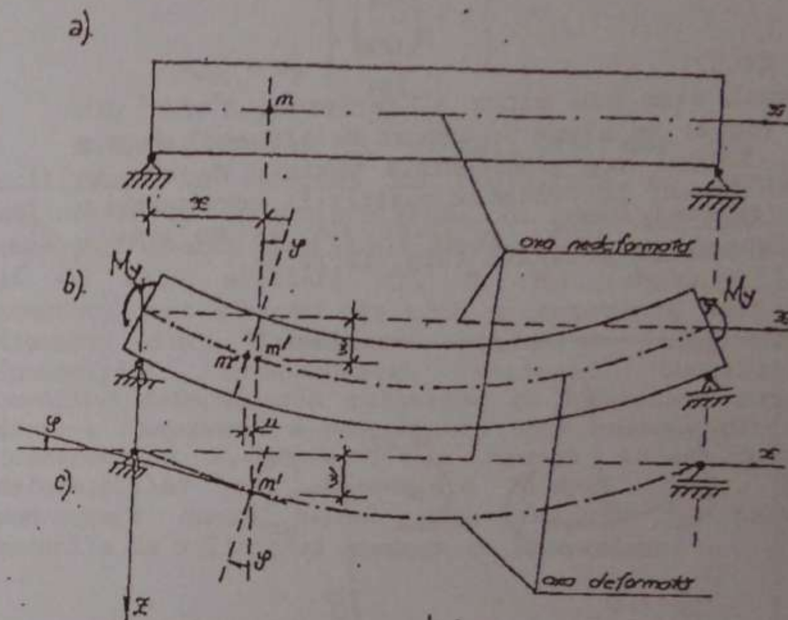


Fig. 12.9

Prin urmare, deformaţiile de încovoiere cuprind rotiri φ ale secţiunilor şi deplasări w ale barei în planul încovoierii reprezentate prin deplasarea punctelor axei acesteia pe aceeaşi direcţie.

Aşa cum rezultă din figura (12.9,c) mărimile φ şi w diferă de la punct la punct, în consecinţă ele sunt funcţii de abscisă x a secţiunii: $\varphi=\varphi(x)$, $w=w(x)$. Săgeţile w fiind mici, funcţia w(x) va reprezenta o curbă continuă şi netedă (fără frânturi) reprezentând axa deformată a barei încovoiate.

Ecuaţia ei analitică poate fi obţinută cu uşurinţă egalând curbura barei încovoiate $(1/\rho)$ rezultată din ecuaţia (12.6,c), $(1/\rho=M/EI_y)$ cu

expresia matematică a curburii date în Geometria Diferențială:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{\pm\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (12.8)$$

Semnul plus sau minus al derivatei d^2w/dx^2 din ecuația (12.8) se alege în raport de sistemul de axe folosit. Pentru axa z orientată pozitiv de sus în jos la un moment încovoietor pozitiv îi corespunde o curbură negativă (fig. 12.10,a) iar la un moment negativ o curbură pozitivă (fig. 12.10,b).

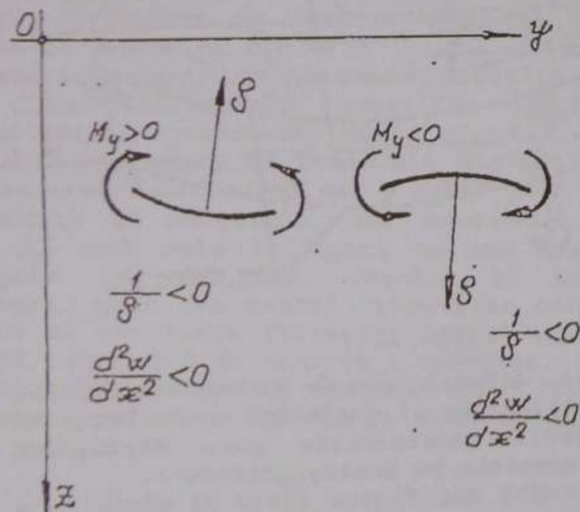


Fig. 12.10

În consecință, în ecuația (12.8) se va reține pentru derivata d^2w/dx^2 numai semnul minus.

Pe de altă parte, în ipoteza micilor deformații acceptate pentru săgețile w, termenul $(dw/dx)^2$ reprezintă o cantitate infinitezimală la puterea a doua a cărei valoare este neglijabilă în raport cu unitatea $(dw/dx)^2=0$.

Cu aceste precizări ecuația (12.8) ia forma:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} \qquad (12.9)$$

și reprezintă ***ecuația diferențială*** a axei deformate a barei solicitate la încovoiere pură.

Produsul EI_y poartă denumirea de ***rigiditate la încovoiere*** a barei.

Din considerente geometrice unghiul de rotire a unei secțiuni φ este egal cu cel format de axa nedeformată x cu tangenta geometrică la axa deformată în secțiunea respectivă, ca unghiuri cu laturile perpendiculare (fig. 12.9,c).

La rândul său, acesta din urmă, în baza Analizei Matematice are coeficientul unghiular (tgφ) egal cu derivata întâia a funcției w(x). Deoarece rotirile φ ale secțiunilor sunt mici, tangentele acestora pot fi aproximate prin valorile unghiurilor respective, în consecință expresia analitică a rotirilor se va exprima prin relația:

$$\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \frac{dw}{dx} \qquad (12.10)$$

Având în vedere această relație rezultă că deformațiile din încovoiere ale unei bare sunt complet cunoscute atunci când se cunoaște ecuația axei deformate a acesteia. Matematic aceasta se obține prin integrarea ecuației (12.9). Succesiv vom avea: $\frac{dw}{dx}=\varphi=\frac{1}{EI_y}\int M_{(x)}dx+c_1$; $w=\frac{1}{EI_y}\int\left[\int M_{(x)}dx\right]+c_1x+c_2$,

unde c_1 și c_2 sunt constante de integrare care se determină din condițiile de rezemare a barei.

Astfel, pentru o consolă de lungime ℓ și rigiditate la încovoiere EI_y, încărcate cu un cuplu concentrat $\mathcal{M}$ la capăt (fig. 12.11), momentul încovoietor are expresia $M_y = -\mathcal{M}$ care introdusă în ecuația (12.9) conduce la ecuația diferențială $d^2w/dx^2 = \mathcal{M}/EI_y$. Integrând de două ori se obțin:

$$\frac{dw}{dx} = \varphi(x) = \frac{\mathcal{M}}{EI_y} \cdot x + c_1$$

$$w = w(x) = \frac{\mathcal{M}}{2EI_y} x^2 + c_1 x + c_2$$

În secțiunea A, respectiv pentru x=0, bara este încastrată, în consecință deplasările ei sunt nule. Introducând această condiție în relațiile de mai sus rezultă ecuațiile algebrice:

$$\varphi(0) = c_A = \frac{\mathcal{M}}{EI_y} \cdot 0 + c_1$$

$$w(0) = w_A = \frac{\mathcal{M}}{2EI_y} \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2$$

a căror soluție este $c_1 = c_2 = 0$. Cu acestea, expresiile deformațiilor barei iau forma:

$$\varphi(x) = \frac{\mathcal{M}}{EI_y} x; \quad w(x) = \frac{\mathcal{M}}{2EI_y} x^2 \qquad (12.11)$$

Deformațiile maxime ale consolei iau naștere la capătul ei liber (fig. 12.11). Valorile acestora se obțin cu relațiile (12.11) făcând pe $x = \ell$:

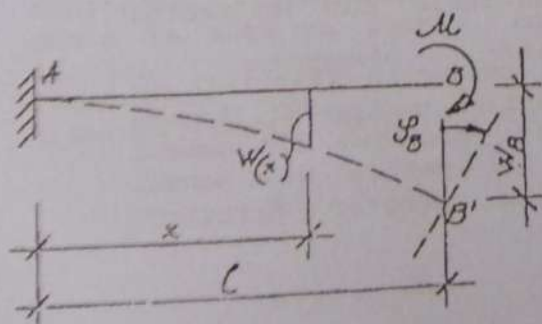


Fig. 12.11

$$\varphi_{max} = \varphi_B = \frac{\mathcal{M}}{EI_y} \ell \qquad (12.12.a)$$

$$w_{max} = w_B = \frac{\mathcal{M} \cdot \ell^2}{2EI_y} \qquad (12.12.b)$$

Deformațiile φ și w definite mai sus se utilizează în calculul de rigiditate al barelor solicitate la încovoiere pură. În cazul barelor la care încovoierea este dublă ($M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$) sau însoțită și de alte eforturi (T, N, M_t), deformațiile acestora sunt compuse din câte o componentă dată de fiecare efort, considerat acționând independent (principiul independenței acțiunii forțelor). Urmărind determinarea rotirilor și săgeților numai dintr-o componentă a momentului, spre exemplu din M_y (considerând $M_z=T=N=M_t=0$) se ajunge la calculul deformațiilor din încovoiere simplă pură, în consecință acest calcul este folosit în toate cazurile de solicitări compuse cu încovoiere.

12.4 METODA GRINZII CONJUGATE PENTRU DETERMINAREA AXEI DEFORMATE (METODA MOHR)

Obținerea ecuației analitice a axei deformate a barei încovoiate w(x) prin integrarea ecuației diferențiale (12.9) este dificilă, în special atunci când încărcările conduc la expresii diferite ale momentelor încovoietoare pe lungimea acesteia. Divizând bara într-un număr de intervale egal cu cel al expresiilor distincte ale momentului M(x), pe fiecare din ele, cu relația (12.9), rezultă câte o ecuație diferențială care prin integrare introduce câte două constante. Rezultă astfel un mare număr de constante și de condiții limită necesare pentru determinarea acestora.

O metodă comod de aplicat, care elimină inconvenientele arătate mai sus, a fost dată de

Otto Mohr, cunoscută în literatura de specialitate şi sub denumirea de *metoda grinzii conjugate* sau a *grinzii fictive*. Aplicarea acesteia este deosebit de eficientă atunci când se urmăreşte calculul săgeţilor şi rotirilor în anumite secţiuni ale unei grinzi şi nu ecuaţia analitică a axei deformate.

Pentru fundamentarea teoretică a metodei vom considera o grindă solicitată la încovoiere plană pură în secţiunile căreia iau naştere momentele încovoietoare M (M_y sau M_z).

Dacă pe o grindă de aceeaşi lungime, pe care o vom numi *grindă conjugată*, s-ar aplica o încărcare continuă fictivă de intensitate $q_f=M_y/EI_y$, aceasta ar produce pe grinda respectivă o forţă tăietoare T_f şi un moment încovoietor M_f, numite *forţă tăietoare fictivă* şi respectiv *moment încovoietor fictiv*.

Conform relaţiilor (7.4) şi (7.5) vom avea:

$$\frac{dM_f}{dx} = T_f \qquad (12.13)$$

$$\frac{d^2M_f}{dx^2} = -q_f = -\frac{M_y}{EI_y} \qquad (12.14)$$

Comparând relaţiile (12.14) şi (12.9) rezultă:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2M_f}{dx^2} \qquad (12.15)$$

Integrând succesiv relaţia (12.15) se obţin expresiile generale ale rotirilor şi săgeţilor grinzii:

$$\frac{dw}{dx} = \varphi = \frac{dM_f}{dx} + C_1 = T_f + C_1$$
$$w = M_f + C_1x + C_2 \qquad (12.16)$$

Dacă reazemele grinzii conjugate se aleg în aşa fel încât în acestea să avem:

$$\varphi_0 = T_f, \quad w_0 = M_f \qquad (12.17)$$

constantele de integrare din relaţiile (12.16) devin $C_1 = C_2 = 0$ iar expresiile rotirilor şi săgeţilor grinzii reale iau forma:

$$\varphi(x) = T_f(x), \quad w(x) = M_f(x) \qquad (12.18)$$

În baza acestora:

- rotirea $\varphi(x)$ într-o secţiune oarecare a unei grinzi este egală cu forţa tăietoare fictivă T_f din aceeaşi secţiune a grinzii conjugate încărcate cu o forţă fictivă $q_f = M/EI$.
- săgeata $w(x)$ într-o secţiune a unei grinzi este egală cu momentul încovoietor fictiv M_f din aceeaşi secţiune a grinzii conjugate încărcate cu o forţă fictivă $q_f = M/EI$.

Alegerea reazemelor la grinzile conjugate se face în funcţie de reazemele grinzii reale în baza relaţiilor (12.17).

Pentru cazurile uzuale corespondenţa dintre acestea este prezentată în tabelul 12.1. Prin urmare, grinda fictivă este o bară de aceeaşi lungime cu grinda reală şi cu reazeme conform precizărilor din tabelul (12.1).

Folosirea ei în calculul deformaţiilor la încovoiere se face în următoarea succesiune:

- se trasează diagrama momentelor încovoietoare reale $M=M(x)$ pe grinda reală, din încărcarea reală.
- se alcătuieşte grinda conjugată (fictivă) şi se încarcă cu forţa fictivă $q_f=M(x)/EI$. Pentru $M>0$ forţa q_f se va lua pozitivă (în sensul pozitiv al axei z) iar pentru $M<0$ sensul forţei fictive va fi contrar direcţiei menţionate.

- se calculează T_f şi M_f în secţiunile grinzii conjugate corespunzătoare secţiunilor în care sunt căutate deformaţiile $\varphi(x)$ şi $w(x)$ ale grinzii reale şi apoi se aplică relaţiile (12.18).

Tabelul 12.1

Grinda reală			Grinda conjugată		
Reazemul	φ_0	w_0	T_f	M_f	Reazemul
Încastrare	0	0	0	0	Capăt liber
Capăt liber	≠0	≠0	≠0	≠0	Încastrare
Reazem simplu sau articulaţie de capăt	≠0	0	≠0	0	Articulaţie sau reazem simplu de capăt
Reazem simplu intermediar	≠0	0	≠0	0	Articulaţie intermediară
Articulaţie intermediară	≠0	≠0	≠0	≠0	Reazem simplu intermediar

Observaţii

1. Dacă grinda reală este de secţiune constantă, rigiditatea EI_y din relaţia (12.14) poate fi dată ca factor, caz în care încărcarea fictivă corespunde intensităţii momentului încovoietor ($q_f = M_y$). În acest mod de aplicare, deformaţiile φ şi w se vor calcula cu relaţiile:

$$\varphi(x) = \frac{T_f}{EI_y} \tag{12.19}$$

$$w(x) = \frac{M_f}{EI_y} \tag{12.20}$$

2. În cazul grinzilor cu încărcări complexe pentru comoditatea calculului eforturilor T_f şi M_f, se recomandă a se descompune încărcarea reală pe grinda reală în forţe sau sisteme de forţe simple care să conducă la diagrame de momente a căror arii şi centre de greutate să fie uşor de evaluat.

3. Cu semnele precizate pentru q_f şi cele adoptate pentru M_y, rotirile pozitive ($\varphi > 0$) corespund sensului orar, iar cele negative ($\varphi < 0$) sensului trigonometric.Deplasările w pozitive > 0 se produc în sensul pozitiv al axei z.

4. Forţa tăietoare fictivă T_f şi momentul încovoietor fictiv M_f au dimensiunea de FL^2 şi respectiv FL^3 măsurându-se în orice unitate de forţă amplificată cu orice unitate de lungime la puterea a 2-a (kNm²; daNcm² ş.a.m.d) pentru T_f şi la puterea a 3-a (kNm³; daNcm³, Nmm³ ş.a.m.d) pentru M_f.

Pentru o mai bună înţelegere a modului de utilizare a metodei prezentate, vom stabili în continuare expresiile rotirilor şi săgeţilor caracteristice pentru câteva tipuri de grinzi şi încărcări întâlnite mai frecvent în tehnica construcţiilor.

12.4.1 Grinda simplu rezemată încărcată cu o forţă uniform distribuită q

Diagrama de momente M_y pe grinda reală stabilită în alineatul (7.3.1) are forma dată în figura 7.5,c iar grinda conjugată aferentă şi încărcarea fictivă pe aceasta $q_f = M_y$ este arătată în figura (12.12,b).

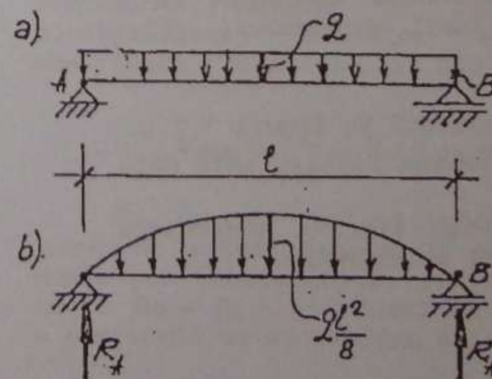


Fig. 12.12

Reacţiunile din reazeme şi eforturile din secţiunile grinzii fictive se determină cu totul identic calculului forţelor de legătură şi eforturilor în secţiuni la grinzile reale încărcate cu forţe reale. Procedând în acest fel se obţin:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\ell \cdot \frac{q\ell^2}{8}\right) = \frac{q\ell^3}{24}$$

$$T_{fA} = R_A;\ T_{fB} = -R_B;$$

$$M_{f,max} = R_A \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{q\ell^3}{24}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{q\ell^4}{48} - \frac{3q\ell^4}{384} = \frac{5q\ell^4}{384}$$

Folosind relaţiile (12.21) se obţin:

$$\varphi_A = \frac{q\ell^3}{24EI_y} = -\varphi_B \qquad (12.21)$$

$$w_{max} = f_{max} = \frac{5q\ell^4}{384EI_y} \qquad (12.22)$$

Semnul (+) al lui φ_A indică rotirea secţiunii A în sens orar iar semnul (-) al lui φ_B indică rotirea secţiunii B în sens trigonometric (fig. 12.12,a).

Săgeata maximă a grinzii ia naştere la mijlocul deschiderii acesteia. Semnul ei (+) indică o deplasare în sensul pozitiv al axei z (de sus în jos).

12.4.2 *Grinda simplu rezemată încărcată cu o sarcină concentrată la mijlocul deschiderii (fig. 12.13,a)*

- Diagrama M_y este cea indicată în figura 7.7,c.
- Grinda fictivă şi încărcarea fictivă este dată în figura (12.13,b).
- Reacţiunile şi eforturile fictive (calculate pe baza figurii 12.13,b) au valorile:

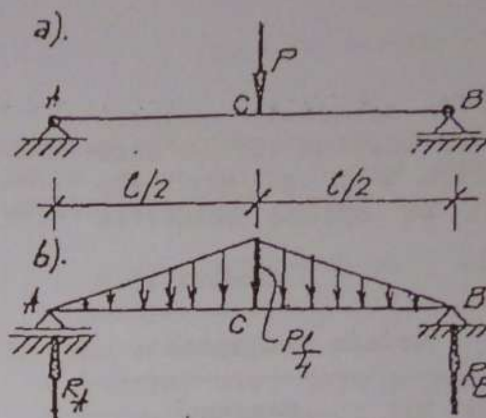


Fig. 12.13

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}P\frac{\ell}{4}\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^2}{16}$$

$$M_{f,max} = M_{fC} =$$

$$= R_A\frac{\ell}{2} - \frac{P\ell^2}{16}\cdot\frac{1}{3}\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{48}$$

Cu relaţiile (12.19) şi (12.20) se obţin rotirile în secţiunile A şi B şi săgeata maximă, ce apare în punctul C (în dreptul forţei).

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{P\ell^2}{16EI_y} \qquad (12.23)$$

$$f_{max} = w_C = \frac{P\ell^3}{48EI_y} \qquad (12.24)$$

12.4.3. *Consola încărcată cu o forţă uniform distribuită q (fig. 12.14,a)*

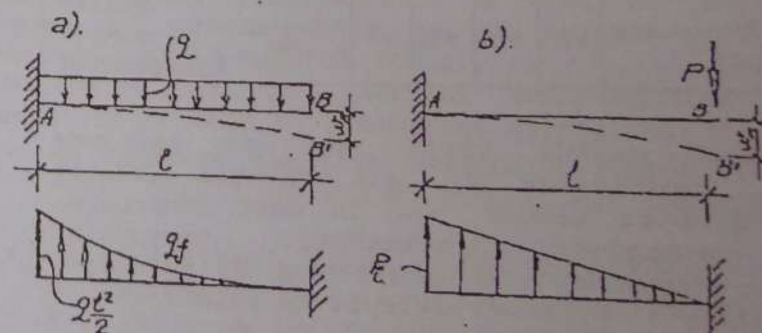


Fig. 12.14

Diagrama M_y este trasată în figura (7.9,c). Momentul fiind negativ, forța fictivă q_f va avea sensul antigravitațional.

Grinda fictivă și încărcarea pe acesta sunt reprezentate în figura (12.14,a). În secțiunea B eforturile fictive au valorile:

$$T_f = \frac{1}{2} \cdot q \frac{\ell^2}{2} \cdot \ell = \frac{q\ell^2}{6}; \quad M_f = \frac{q\ell^2}{6} \cdot \frac{3}{4}\ell = \frac{q\ell^3}{8}$$

Folosind relațiile (12.18) se obțin:

$$\varphi_B = \frac{q\ell^2}{6EI_y} \tag{12.25}$$

$$f_{max} = w_B = \frac{q\ell^3}{8EI_y} \tag{12.26}$$

Consola încărcată cu o forță concentrată la capăt P Cu diagrama M dată în figura 7.10,c, încărcarea fictivă are forma din figura 12.14,b. Vom avea:

$T_{fB} = \frac{1}{2} P\ell^2; \; M_{fB} = \frac{1}{2} P\ell^2 \cdot \frac{2}{3}\ell = \frac{P\ell^3}{6}$. Cu acestea

$$\varphi_B = \frac{P\ell^2}{2EI_y} \tag{12.25'}$$

$$w_B = \frac{P\ell^3}{3EI_y} \tag{12.26'}$$

12.5 CALCULUL PRACTIC DE REZISTENȚĂ ȘI RIGIDITATE LA ÎNCOVOIERE PURĂ

Așa cum s-a văzut în aliniatul 12.2, în secțiunile barelor solicitate la încovoiere pură iau naștere tensiuni de întindere și de compresiune date de formulă lui Navier. Valorile lor extreme σ_{max}, σ_{min} se dezvoltă în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră (fig. 12.15) iar natura acestora (întindere sau compresiune) este dată de sensul momentului M_y.

Secțiunea va prelua aceste solicitări fără a se rupe atâta timp cât tensiunile normale maxime și

minime sunt inferioare (cel mult egale) cu rezistența de calcul a materialului din componența barei.

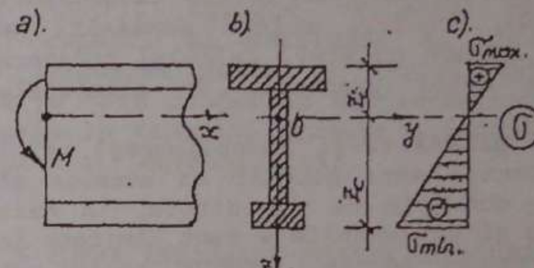


Fig. 12.15

În consecință, condiția de rezistență la încovoiere se va exprima prin relațiile:

$$\frac{M_y}{I_y} z_i \le R_t; \; \frac{M_y}{I_y} z_c \le R_c \tag{12.27}$$

în care R_t și R_c reprezintă rezistențele de calcul la întindere și respectiv la compresiune a materialului, iar z_i și z_c distanțele de la axa neutră la fibrele extreme întinse și comprimate (fig. 12.9.b). Observând că I_y/z_i și I_y/z_c reprezintă modulii de rezistență W_{yi} și W_{yc} corespunzători fibrelor extreme întinse și comprimate, relațiile (12.27) iau forma:

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_{yi}} \le R_t; \; \sigma_{min} = \frac{M_y}{W_{yc}} \le R_c \tag{12.28}$$

În cazul materialelor având comportare identică la întindere și la compresiune (ex. oțelul moale pt. construcții), rezistențele R_c și R_t sunt egale ($R_c = R_t = R$) astfel că cerința de rezistență a secțiunii se va exprima printr-o singură relație:

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} \le R \qquad (12.29)$$

în care $W_y = I_y/z_{max}$ iar $z_{max} = \max(z_i, z_c)$

Concomitent apariției stării de tensiune menționate, secțiunile barei se rotesc cu unghiuri $\varphi(x)$ iar punctele acestora suferă deplasări pe direcția axei z, notate cu $w(x)$. Calculul acestora se face conform celor precizate în aliniatele (12.3) și (12.4).

Pentru ca o grindă să-și îndeplinească rolul de element structural este necesar ca aceasta să îndeplinească și condiția de rigiditate, în baza căreia rotirile φ și deplasările w sunt limitate la anumite valori maxim admise, numite rotiri și deplasări (săgeți) admisibile, notate cu φ_a și f_a.

Va trebui deci să avem:

$$\varphi_{max} \le \varphi_a \qquad (12.30)$$

$$f_{max} = w_{max} \le f_a \qquad (12.31)$$

Nesatisfacerea acestor condiții este considerată periculoasă din punct de vedere al rezistenței și neagreată funcțional, aceasta generând o senzație neplăcută de insecuritate. Obișnuit, săgețile admisibile f_a sunt date în normele tehnice ca fracțiuni din deschiderea ℓ a grinzilor: $\ell/200$, $\ell/300$, ..., $\ell/1000$, în funcție de tipul barei și de rolul ei structural (Anexa 11).

După caz, relațiile (12.28), (12.29) și (12.31) sunt utilizate pentru *verificarea de rezistență și rigiditate la încovoiere*.

Operația revine la testarea existenței acestor relații pentru o bară dată ca alcătuire și încărcări exterioare.

Pentru barele realizate din materiale prezentând comportare identică la întindere și

compresiune ($R_t = R_c = R$), luând la limită relația (12.29): $\frac{M_y}{W_y} = R$, se deduce:

a) Formula pentru *dimensionare la încovoiere*:

$$W_{y,nec} = \frac{M_y}{R} \qquad (12.32)$$

Dimensiunile secțiunii rezultă egalând modulul de rezistență geometric W_y, calculat pe baza formei și dimensiunilor secțiunii, cu modulul de rezistență necesar $W_{y,nec}$ calculat din considerente mecanice.

Pentru secțiuni pătrate de latura a (vezi fig. 12.16), vom avea:

$$W_y = a\frac{a^2}{6} = \frac{a^3}{6} = W_{y,nec};\quad \frac{a^3}{6} = \frac{M_y}{R};\quad a = \sqrt[3]{\frac{6M_y}{R}}$$

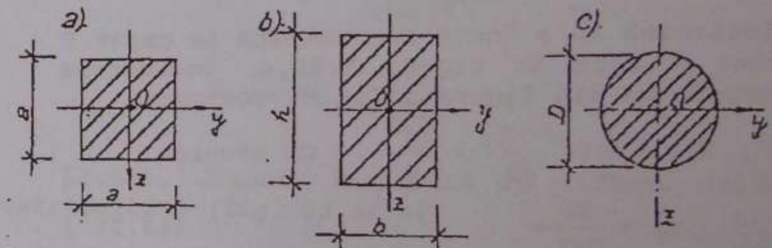


Fig. 12.16

Dacă secțiunea este circulară, cu diametrul D (fig. 12.16,c), succesiv se obțin:

$$W_y = W = \frac{\pi D^3}{32} = W_{y,nec},\quad \frac{\pi D^3}{32} = \frac{M_y}{R};\quad D = \sqrt[3]{\frac{32M_y}{R}}.$$

În cazul unei secțiuni dreptunghiulare de laturi b și h (fig. 12.16,b) $W_y = \frac{bh^2}{6} = W_{y,nec}$.

Ecuația $bh^2/6 = M_y/R$ conține două necunoscute. Pentru determinarea lor se alege una din ele și apoi se calculează cealaltă. La grinzile dreptunghiulare

obișnuite raportul $h/b=k=1,5 \div 3,0$. Alegând o valoare pentru k se obține o ecuație suplimentară $h=kb$ care împreună cu prima formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute ale cărei soluții sunt dimensiunile căutate: $b = \sqrt[3]{\frac{6M}{k^2R}}$ și $h=kb$.

În cazul barelor realizate din materiale prezentând comportare diferită la întindere și compresiune, se calculează $W_{yi,nec}$ sau $W_{yc,nec}$ cu una din relațiile (12.28) luate la limită. Cu valoarea astfel determinată se alcătuiește secțiunea și se face verificarea ei cu ambele relații (12.28). Dacă acestea nu se verifică concomitent, secțiunea se modifică și calculul de verificare se reia. Dimensionarea se consideră terminată numai după satisfacerea ambelor relații (12.28).

b) Formula de calcul a *capacității portante* a unei secțiuni la încovoiere:

$$M_{y,cap} = W_y \cdot R \tag{12.33}$$

Dacă materialul secțiunii prezintă rezistențe de calcul diferite la întindere și compresiune ($R_t \neq R_c$), pe baza relațiilor (12.28) se calculează:

$$M_{t,cap} = W_{yi} \cdot R_t, \tag{12.34}$$

$$M_{c,cap} = W_{yc} \cdot R_c, \tag{12.35}$$

momentul capabil al secțiunii reprezentând valoarea minimă a momentelor de mai sus:

$$M_{cap} = \min(M_{t,cap}, M_{c,cap}) \tag{12.36}$$

O bară supusă la încovoiere va prezenta un număr de momente capabile (calculate ca mai sus) egal cu numărul secțiunilor ei caracteristice.

Calculate și reprezentate grafic acestea permit trasarea diagramelor de momente capabile, utilizate în calculul elementelor de structură.

În unele cazuri prezintă interes forțele capabile ale unui element încovoiat. Pentru

determinarea acestora, pe baza staticii barei se calculează momentul maxim M_{max} în funcție de forțele căutate $M_{max}(P)$. Egalând valoarea acestuia cu momentul capabil al secțiunii se obțin forțele căutate (valoarea maximă a forței/forțelor care aplicate pe bară conduc în secțiunea/secțiunile ei periculoase la tensiuni normale σ inferioare celor de calcul R ale materialului).

12.6 FORME RAȚIONALE PENTRU SECȚIUNILE BARELOR ÎNCOVOIATE. SECȚIUNI ECONOMICE

Distribuția liniară a tensiunilor normale σ într-o secțiune normală a grinzii încovoiate (v. fig. 12.7, 12.8 și 12.15) face ca fibrele acesteia situate în apropierea axei neutre să fie solicitate redus, chiar și atunci când în fibrele extreme acestea ajung la valoarea maxim admisă (σ_c, σ_t, R, R_c sau R_t, după caz).

Deci rezultă că în cazul acestei solicitări, pentru a lucra eficient, materialul secțiunii trebuie dispus cât mai departe de axa neutră, acolo unde tensiunile σ sunt mari.

Pe de altă parte, în baza relației (12.33), capacitatea portantă a unei secțiuni rezultă a fi cu atât mai mare cu cât modulul de rezistență al aceteia este mai mare. O secțiune va fi cu atât mai economică la încovoiere cu cât pentru prealuarea aceluiași moment M, va avea o arie a secțiunii A cât mai mică, necesitând deci material mai puțin.

Întrucât cu aceeași arie A pot fi alcătuite secțiuni cu moduli de rezistență W_y diferiți, rezultă că acelea dintre ele va fi mai economică care va avea modulul de rezistență mai mare.

În consecință, raportul dintre modulul de rezistență W_y și aria secțiunii A constituie criteriul de alcătuire economică a unei secțiuni sub aspect mecanic.

La o secţiune dreptunghiulară (fig. 12.16.a) valoarea acestuia este: $\frac{W_y}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{bh} = \frac{h}{6} = 0,167\,h$, iar la o secţiune circulară (fig. 12.16,b):

$$\frac{W}{A} = \frac{\pi D^3/32}{\pi D^2/4} = \frac{D}{8} = 0,125\,D$$

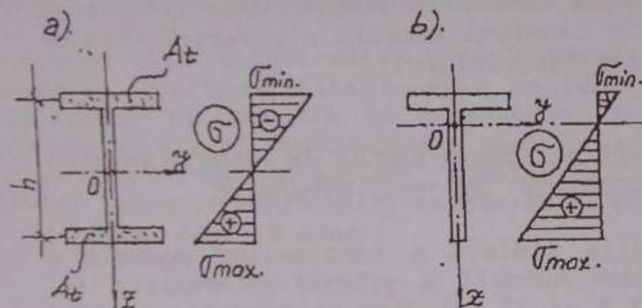


Fig. 12.17

Pentru evaluarea aceluiaşi raport în cazul secţiunii I, frecvent utilizate la alcătuirea grinzilor, vom neglija pentru început aportul inimii şi vom considera cele două tălpi de arii A_t fiecare, situate la distanţa h una de alta (fig. 12.17.a) În această schematizare vom avea:

$$I_y = 2A_t\left(\frac{h}{2}\right)^2;\ z_{max} = \frac{h}{2};\ W_y = \frac{I_z}{z_{max}} = A_t \cdot h;$$

$$A = 2A_t;\ \frac{W_y}{A} = \frac{A_t \cdot h}{2A_t} = \frac{h}{2} = 0,5\,h.$$

În realitate, inimile secţiunilor I luate în calcul măresc atât modulul de rezistenţă cât şi aria totală A a profilului. Deoarece luarea în considerare a inimii conduce la o creştere mai mică a modului de rezistenţă faţă de creşterea ariei A, raportul $W_y/A < 0,5h$.

Considerentele arătate mai sus au condus la crearea secţiunilor economice la încovoiere I şi U.

Pentru înălţimi h mici astfel de profile sunt fabricate industrial prin laminare iar pentru încărcări mari se alcătuiesc secţiuni compuse sudate sau nituite.

Secţiunile economice ale grinzilor realizate din materiale având aceeaşi comportare la întindere şi compresiune ($R = R_t = R_c$) sunt cele simetrice faţă de axa neutră (fig. 12.17,a).

În fibrele extreme ale acestora, tensiunile normale fiind egale în valoare absolută, materialul secţiunii este utilizat economic.

Secţiunile nesimetrice (fig. 12.17, b) nu sunt recomandate pentru aceste materiale deoarece în fibrele lor extreme, mai apropiate de axa neutră, tensiunile normale σ sunt mai reduse, materialul secţiunii fiind utilizat neraţional.

Ele pot fi eficiente pentru materiale cu comportare diferită la întindere şi compresiune ($R_t \neq R_c$) dacă valorile tensiunilor se dirijează convenabil, cu satisfacerea relaţiilor (12.28).

12.7 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 12.7.1

Să se determine momentele capabile ale secţiunilor din figura 12.18. Corespunzător acestora se vor trasa diagramele tensiunilor σ pe secţiune. Se dă $R_c = R_t = R = 2100$ daN/cm²

Rezolvare

- Secţiunea simetrică faţă de axa Oy

Axele Oy şi Oz se confundă cu axele de simetrie. Vom avea (fig. 12.18,c):

$$I_y = \frac{0,8 \times 50^3}{12} + 2\left(\frac{25 \times 1,2^3}{2} + 25 \times 1,2 \cdot 25,6^2\right) = 49781\,cm^4;$$

$z_{max} = 25+1,2 = 26,2$ cm; $W_y = 49781/26,2 = 1900 cm^3$

Folosind ecuația (12.33):

$$M_{cap} = W_y \cdot R = 1900 \cdot 2100 = 399 \cdot 10^4 daNcm = 399 kNm$$

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{3990000}{1900} = 2100 \text{ daN/cm}^2$$

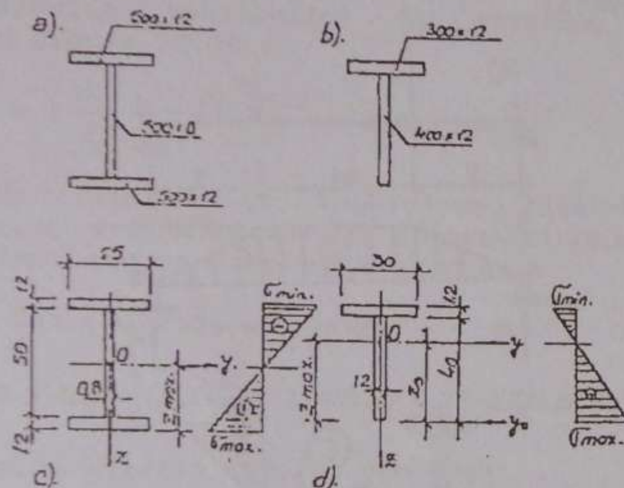


Fig. 12.18

- Secțiunea nesimetrică față de axa Oy

Axa Oz se confundă cu axa de simetrie verticală. Axa principală Oy este perpendiculară pe Oz și trece prin centrul de greutate al secțiunii. Pentru determinarea poziției acestuia se alege o axă arbitrară y_0 (fig. 12.18,d) în raport de care:

$$z_G = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i} = -\frac{20 \times 40 \times 1,2 + 40,6 \times 30 \times 1,2}{40 \times 1,2 + 30 \times 1,2} = -28,829 \text{ cm}$$

Față de axa y dusă prin centrul de greutate al secțiunii, vom avea:

$$I_y = \frac{1,2 \times 40^3}{12} + 1,2 \times 40 \times 8,829^2 + \frac{30 \times 1,2^3}{12} + 30 \times 1,2 \times 11,771^2 =$$

$$= 14063 \text{ cm}^4$$

$z_{max}=28,829$cm; $z_{min}=12,371$cm; $W_y=487,813 cm^3=W_{y,min}$;

$W_{y,max}=I_y/z_{min}=1136,77 cm^3$;

$M_{cap}=W_{y,min} \cdot R=102,440 \cdot 10^4 daNcm=102,440 kNm$;

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{cap}}{W_{y,min}} = \frac{1024400}{487,813} = 2100 daN/cm^2$$

$$|\sigma_{min}| = \frac{M_{cap}}{W_{y,max}} = \frac{1024400}{1136,77} = 901 \text{ daN/cm}^2$$

EXEMPLUL 12.7.2 (fig. 12.19,a)

O consolă din lemn ($R = R_t = R_c = 90$ daN/cm^2) este solicitată de un cuplu de moment M = 25kNm. Se cere dimensionarea consolei ca bară de secțiune dreptunghiulară având raportul laturilor $h/b = 1,5$.

Pentru secțiunea adoptată se va trasa diagrama tensiunilor normale în secțiunile barei și se va calcula săgeata și rotirea la capătul liber al consolei ($E=0,1 \cdot 10^6 daN/cm^2$)

Rezolvare

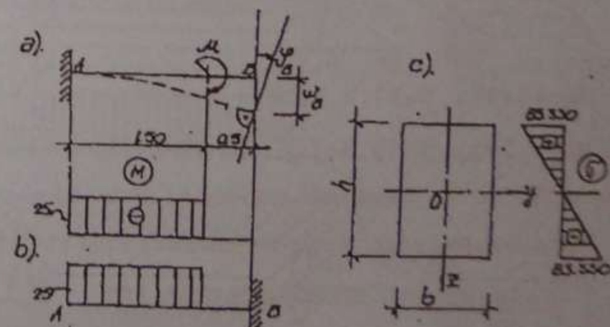


Fig. 12.19

Se trasează diagrama M pe grindă din care rezultă $|M_{max}|=M=25kNm$ şi se calculează modulul de rezistenţă necesar cu relaţia (12.32).

$W_{y,nec} = |M_{max}|/R = 250000/90 = 2778cm^3$

Modulul geometric al secţiunii este dat de prima relaţie din sistemul (8.16). Egalând W_y cu $W_{y,nec}$ şi asociind aceste relaţii raportului h/b se obţine sistemul de două ecuaţii:

$$\frac{bh^2}{6} = 2778\ cm^3,\ \frac{h}{b} = 1,5$$

ale cărui soluţii sunt b = 19,494cm; h = 29,241cm.

Pe baza acestora se adoptă b = 20cm; h = 30cm; cu care:

$I_y = 20\cdot30^3/12 = 45000cm^4$

$W_{y,ef} = 20\cdot30^2/6 = 3000cm^3$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{250000}{3000} = 83,30\,daN/cm^2 < R = 90daN/cm^2$$

Diagrama σ este arătată în figura 12.19.c.

Pentru determinarea rotirii şi săgeţii în B se utilizează metoda Mohr. Grinda fictivă, conform precizărilor din tabelul 12.1 este arătată în figura 12.19,b. Conform relaţiilor (12.19) şi (12.20):

$$\varphi_B = \frac{T_{fB}}{EI_y};\ w_B = \frac{M_{fB}}{EI_y};$$

în care:

$T_{fB} = 25\times1,5=37,5\ kNm^2$

$M_{fB} = 25\times1,5\times(0,5+1,5/2)=46,875kNm^3$.

Deformaţiile la capătul consolei vor fi:

$\varphi_B = 37,5\times10^6/0,1\times10^6\times45000=8,333\times10^{-3}rad=$

$=(8,333\cdot10^{-3}\cdot180/\pi)^\circ=0^\circ28'39''$.

$w_B = f_{max} = 46,875\cdot10^8/0,1\cdot10^6\cdot45000 = 1,042cm$.

Exemplul 12.7.3

Să se dimensioneze dintr-un profil laminat I grinda din figura 12.20,a încărcată cu forţele P=110kN. Pentru profilul adoptat se va trasa diagrama tensiunilor normale σ în secţiune şi săgeata la mijlocul deschiderii AB a grinzii. Se dă: $R = 2100daN/cm^2$; $E = 2,1\cdot10^6daN/cm^2$.

Rezolvare:

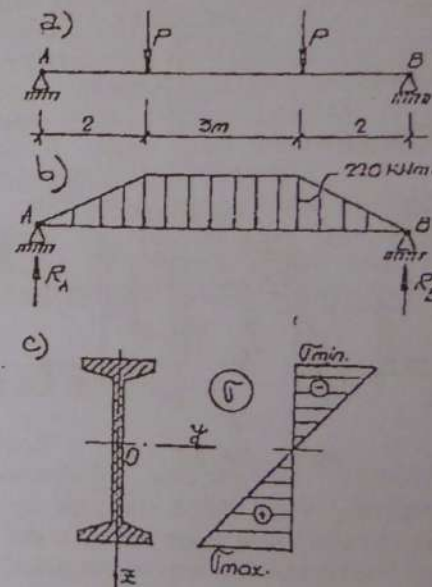


Fig. 12.20

Momentul maxim pe grindă are valoarea M_{max} = 2×110 = 220Nm. Folosind relaţia 12.32 se calculează:

$W_{y,nec} = M/R = 2200000/2100 = 1047 cm^3$

Cu acest modul de rezistență se intră în tabelul cu profile laminate (Anexa 5) și se alege tipul a cărei secțiune are $W_y \geq W_{y,nec}$, cel mai apropiat. Procedând în acest fel se obține I_{36} pentru care $W_y = 1090 cm^3$; $I_y = 19610 cm^4$.

Distribuția tensiunilor în secțiune este arătată în figura 12.20,c.

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{2200000}{1090} = \pm 2018 \text{ daN/cm}^2$$

Grinda fictivă și încărcarea fictivă pe aceasta sunt reprezentate în figura 12.20,b. Cu valorile indicate pe diagramă se obțin:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}(7+3) \times 220 = 1100 \text{ kNm}^2$$

$$M_{f\left(\frac{l}{2}\right)} = 1100 \cdot 3,5 - 220 \times \frac{1}{2}(1,5 + \frac{1}{3}2) - 220 \times 1,5 \times 0,75 = 3125,830 \text{kNm}^3$$

Folosind relația (12.20) vom avea:

$$w_{\frac{l}{2}} = 3125,83 \times 10^8 / 2,1 \times 10^6 \times 19610 = 7,59 \text{ cm}$$

CAPITOLUL 13

ÎNCOVOIEREA PLANĂ CU FORȚĂ TĂIETOARE

13.1 GENERALITĂȚI. DETERMINAREA TENSIUNILOR TANGENȚIALE - FORMULA LUI JURAVSKI

Dacă încărcările exterioare și reacțiunile produc în secțiunile unei grinzi momente încovoietoare M și forțe tăietoare T, grinda respectivă va fi solicitată la încovoiere cu forță tăietoare.

Vectorii M și T fiind perpendiculari, rezultă că într-o secțiune a barei solicitate la încovoiere plană cu forță tăietoare putem avea eforturile M_y și T_z sau M_z și T_y.

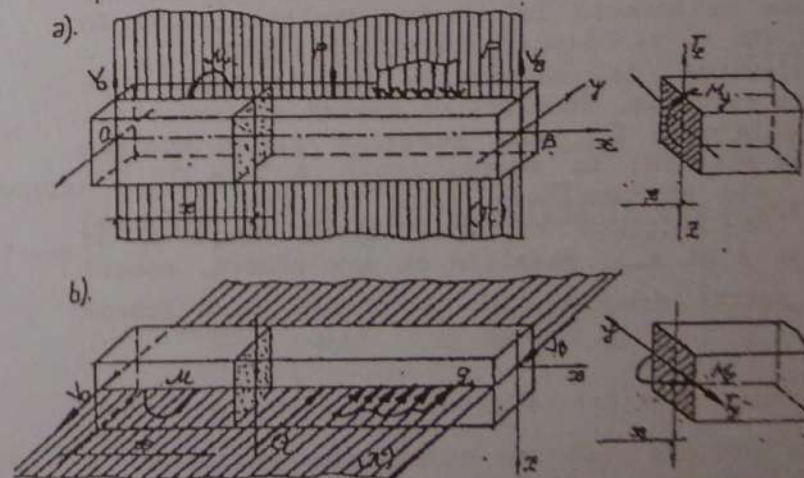


Fig. 13.1

Prima pereche reprezintă o solicitare de încovoiere cu forţă tăietoare în planul xOz, produsă de un sistem de forţe acţionând în acelaşi plan (v. fig. 13.1,a), iar cea de a doua este o solicitare de aceeaşi natură, produsă însă în planul xOy de forţe cu acţiune în acest plan (fig. 13.1,b).

Întrucât efectele ce iau naştere în secţiunile barei sunt aceleaşi, în continuare vom lua în studiu încovoierea cu forţă tăietoare în planul xOz, rezultatele obţinute fiind aplicabile şi pentru solicitarea T_y, M_z din planul xOy, cu modificarea corespunzătoare a indicilor eforturilor şi a caracteristicilor geometrice care intervin în calcul.

Prezenţa în secţiune a eforturilor M_y şi T_z, conform relaţiilor (6.5) şi (6.6) este legată de existenţa în secţiunile respective a tensiunilor normale σ şi a celor tangenţiale τ_{xz}. Aşa cum rezultă din literatura de specialitate [4], [8], [9], [15] etc., efectul momentului încovoietor într-o secţiune, în limitele unor mici aproximaţii, este acelaşi ca şi în cazul încovoierii pure.

În consecinţă, tensiunile normale σ ce iau naştere la încovoierea cu forţă tăietoare se vor determina cu formula lui Navier (relaţia 12.7) în acelaşi mod ca şi în cazul încovoierii pure.

Referitor la tensiunile τ_{xz}, acestea, pe întreaga secţiune, formează un sistem echivalent cu forţa tăietoare T_z, sunt paralele şi au acelaşi sens cu aceasta. La aceeaşi cotă z faţă de axa neutră, ele se consideră egale (v. fig. 13.2,a). Partea de secţiune cuprinsă între dreptele de ordonare z şi z_{max}, paralele cu axa neutră, notată cu S_l poartă denumirea de *secţiunea care lunecă* (fig. 13.2, b şi c).

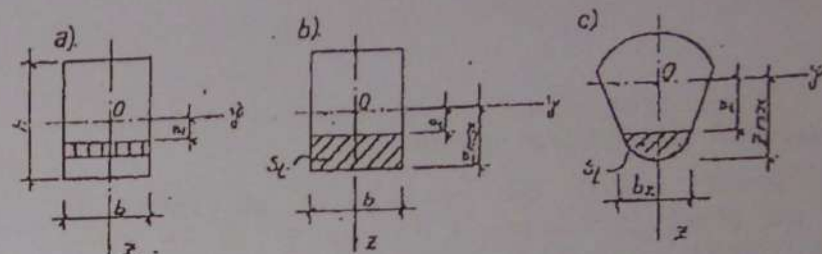


Fig. 13.2

Legea de variaţie a tensiunilor τ_{xz} pe înălţimea secţiunii este dată de relaţia

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S_y}{b_z \cdot I_y} \qquad (13.1)$$

ce poartă denumirea de formula lui Juravski, în care:

- T_z este forţa tăietoare din secţiune,
- S_y - momentul static în raport cu axa y al secţiunii care lunecă,
- b_z - lăţimea secţiunii care lunecă la cota z
- I_y momentul de inerţie al întregii secţiuni în raport cu axa neutră y.

Având în vedere structura formulei lui Juravski, privitor la variaţia tensiunilor τ_{xz} rezultă următoarele:

- pentru o secţiune dată T_z şi I_y, reprezentând două constante (sunt independente de variabila z), în consecinţă, legea de variaţie a tensiunii τ_{xz} pe înălţimea secţiunii este aceeaşi cu aceea a raportului S_y/b;
- în lungul unei bare de secţiune constantă, la aelaşi nivel z de axa neutră, câtul $\frac{S_y}{bI_y}$ este constant şi, prin urmare, tensiunile τ_{xz} au legea de variaţie a forţei tăietoare T_z.

• în fibrele extreme ale unei secţiuni $|z|=|z_{max}|$ astfel că aria secţiunii care lunecă este egală cu zero. Momentul ei static este evident nul, ceea ce conduce la tensiuni $\tau_{xz} = 0$. Pe măsură ce z scade tinzând spre 0, momentul static S_y creşte, luând valoarea maximă în axa neutră, prin urmare tensiunile tangenţiale maxime iau naştere în axa neutră (z = 0);
• dacă solicitarea de încovoiere cu forţă tăietoare se produce în planul xOy (fig. 13.1,b), formula lui Juravski devine

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_z}{b_y \cdot I_z} \tag{13.2}$$

în care:
• T_y este forţa tăietoare din secţiune;
• S_z - momentul static în raport cu axa z al părţii de secţiune ce lunecă (cuprinse între abscisele y şi y_{max});
• b_y - lăţimea secţiunii ce lunecă, corespunzătoare abscisei y;
• I_z - momentul de inerţie al întregii secţiuni în raport cu axa z.

13.2 VARIAŢIA TENSIUNILOR TANGENŢIALE PE SECŢIUNI UZUALE DE GRINZI

Secţiunile uzuale de grinzi solicitate la încovoiere cu forţă tăietoare (M_y, T_z) sunt cele arătate în figura 12.1. Vom deduce în cele ce urmează variaţia tensiunilor tangenţiale τ_{xz} pe câteva dintre acestea, pe baza formulei lui Juravski şi a precizărilor făcute în aliniatul 13.1.

a. *Secţiuni dreptunghiulare (fig. 13.3)*

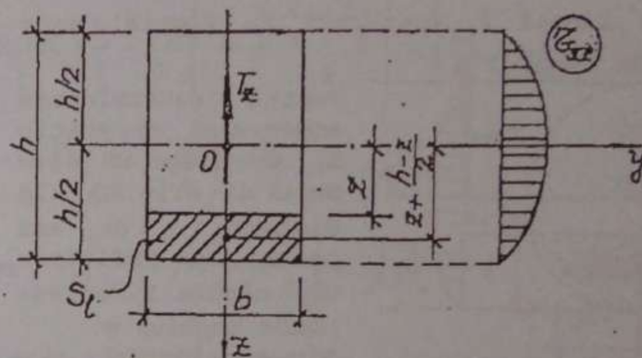


Fig. 13.3

$$S_y = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\cdot\left(z + \frac{h-z}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{13.3}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot \frac{b}{2}}{bI_y}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) = \frac{T_z}{2I_y}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{13.4}$$

Expresia (13.4) pune în evidenţă o lege de variaţie parabolică a tensiunilor τ_{xz}.

Tensiunea maximă $\tau_{xz,max}$ se obţine în axa neutră (z=0);

$$\tau_{xz,max} = \frac{bT_z \cdot h^2}{4bh^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{T_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} \tag{13.5}$$

Pentru $z = \pm\frac{h}{2}$ din formula (13.4) rezultă $\tau_{xz} = 0$. Analizând cele deduse mai sus, rezultă că la o secţiune dreptunghiulară, tensiunile tangenţiale variază după o parabolă de gradul doi

(relația 13.4) fiind maxime în axa neutră și nule în fibrele extreme.

b. *Secțiuni circulare* (fig. 13.4)

Corespunzător depărtării z de axa neutră y, secțiunea ce lunecă S_l (hașurată în figură) este determinată de unghiul α.

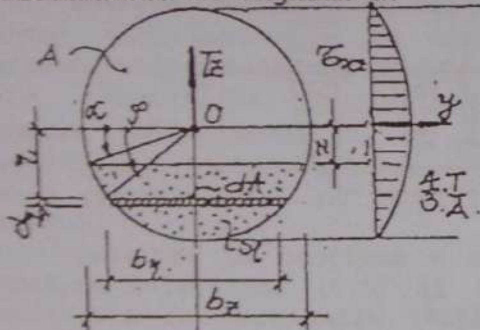


Fig. 13.4

Pentru determinarea momentului ei static S_y, se alege un element de arie dA, la distanța η de axa neutră, cu înălțimea dη, căruia îi corespunde unghiul φ.

Din considerente geometrice vom avea:

$\eta = R \sin\varphi;$

$d\eta = R \cos\varphi d\varphi;$

$b_\eta = 2R\cos\varphi;\; z = R\sin\alpha;$

$dA = b_\eta \cdot d_\eta = 2\, R\cos\varphi \cdot R\cos\varphi d\varphi = 2R^2\cos^2\varphi d\varphi.$

Prin definiție

$$S_y = \int_{S_l} \eta dA = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi \cdot 2R^2\cos^2\varphi d\varphi = 2R^3 \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi =$$

$$= -2R^3 \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,(d\cos\varphi) = -\frac{2R^3}{3}\cos^3\varphi \Big|_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}R^3\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3\alpha\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cos^3\alpha.$$

Aplicând formula lui Juravski (13.5) vom avea:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot \frac{2}{3}R^3\cos^3\alpha}{I_y \cdot 2R\cos\alpha} = \frac{R^2}{3I_y}\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{R^2}{3I_y}\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{3I_y}\left(R^2 - z^2\right) \qquad (13.6)$$

Expresia (13.6) pune în evidență o distribuție parabolică a tensiunilor τ_{xz} pe înălțimea secțiunii (fig. 13.4,b)

Pentru z = ±R, rezultă $\tau_{xz}=0$, iar pentru z = 0 se obțin tensiunile maxime.

$$\tau_{xz,max} = \frac{TR^2}{3I_y} = \frac{T_z}{3} \cdot \frac{R^2}{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_z}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \qquad (13.7)$$

în care $A = \pi R^2$ reprezintă aria secțiunii transversale a barei.

c. *Secțiuni I* (fig. 13.5,a)

Secțiunea I prezintă particularitatea unor salturi bruște a lățimii b a secțiunii pe linia de frontieră dintre inimă și talpă.

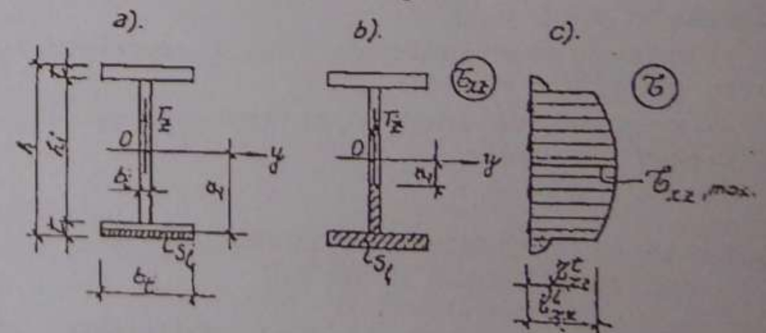


Fig. 13.5

Cum orice punct k de pe această linie aparține atât tălpii cât și inimii, rezultă că formula lui

Juravski pentru $z = \pm\frac{h_i}{2}$ conduce la două valori distincte ale tensiunilor τ_{xz} corespunzătoare lățimilor $b = b_t$ și $b = b_i$.

Având în vedere că tălpile profilului sunt dreptunghiuri cu lățimea b_t, expresia acestora va fi cea stabilită la secțiunea dreptunghiulară și exprimată prin relația (13.4):

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot b_t}{2b_t I_y}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \qquad (13.8)$$

În toate punctele de ordonata $z = \pm\frac{h_i}{2}$, vom avea deci:

$$\tau^t_{xz} = \frac{T_z \cdot b_t}{2b_t I_y}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_i^2}{4}\right), \qquad (a)$$

$$\tau^i_{xz} = \frac{T_z \cdot b_t}{2b_i I_y}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_i^2}{4}\right), \qquad (b) \qquad (13.9)$$

$$\frac{\tau^i_{xz}}{\tau^t_{xz}} = \frac{b_t}{b_i}\,;\ \tau^i_{xz} = \frac{b_t}{b_i}\tau^t_{xz} \qquad (c)$$

Deoarece $b_t >> b_i$ deducem că $\tau^i_{xz} >> \tau^t_{xz}$.

Pe baza celor arătate mai sus, rezultă că diagrama tensiunilor tangențiale τ_{xz} pe înălțimea tălpii, variază parabolic (relația 13.8) și prezintă un salt $\tau^i_{xz} - \tau^t_{xz}$ pe linia de separație dintre inimă și talpă (fig. 13.5,c).

Pentru un punct de pe inimă de ordonată $z = \frac{h_i}{2} - z$ (fig. 13.5,b) vom avea:

$$S_y = b_t\left(\frac{h}{2} - \frac{h_i}{2}\right)\left(\frac{h_i}{2} + \frac{\frac{h}{2} - \frac{h_i}{2}}{2}\right) + b_i\left(\frac{h_i}{2} - z\right)\left(z + \frac{\frac{h_i}{2} - z}{2}\right) =$$

$$= \frac{b_t}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_i^2}{4}\right) + \frac{b_i}{2}\left(\frac{h_i^2}{4} - z^2\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{2I_z b_i}\left[b_t\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_i^2}{4}\right) + b_i\left(\frac{h_i^2}{4} - z^2\right)\right] \qquad (13.10)$$

Expresia (13.10) pune în evidență o distribuție parabolică a tensiunilor tangențiale τ_{xz} și pe înălțimea inimii.

Pentru $z = \frac{h_i}{2}$, se regăsește valoarea τ^i_{xz} dată de relația (13.9,b) iar pentru $z = 0$ se obțin tensiunile maxime $\tau_{xz,max}$ (fig. 13.5,c)

$$\tau_{xz,max} = \frac{T_z}{2I_y b_i}\left[b_t\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_i^2}{4}\right) + \frac{b_i h_i^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{T_z}{8I_y}\left[h_i^2 + \frac{b_t}{b_i}\left(h^2 - h_i^2\right)\right] \qquad (13.11)$$

Observații

1) Diferența dintre τ^i_{xz} și $\tau_{xz,max}$ (fig. 13.5,c) este în general mică iar valoarea tensiunilor τ^t_{xz} neglijabilă. Ca urmare a acestui fapt, inima profilului preia (95÷97)% din volumul tensiunilor τ_{xz} produse de forța tăietoare T_z.

Având în vedere acest lucru, în unele calcule practice tensiunile tangențiale se consideră uniform distribuite pe înălțimea h_i și se calculează cu relația:

$$\tau_{xz} \cong \frac{T_z}{b_i h_i}, \qquad (13.12)$$

eroarea față de τ_{max} dat de relația (13.11) fiind sub 5%.

2) Forța tăietoare T_z, pe lângă tensiunile τ_{xz} arătate mai sus, produce în tălpile profilului tensiuni τ_{xy} (fig. 13.6,b) care se calculează tot cu formula lui Juravski, în care momentul static al secțiunii S_y ce lunecă și lățimea b a acesteia (fig. 13.6,a) au valorile: $S_y = t \cdot y \cdot \frac{h_1}{2}$; $b = t$.

Cu acestea se obțin:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot S_y}{tI_y} = \frac{T_z \cdot t \cdot h_1 \cdot y}{2tI_y} = \frac{T_z \cdot h_1 \cdot y}{2I_y}. \qquad (13.13)$$

Relația (13.13) pune în evidență o distribuție liniară a tensiunilor τ_{xy} (fig. 13.6,b).

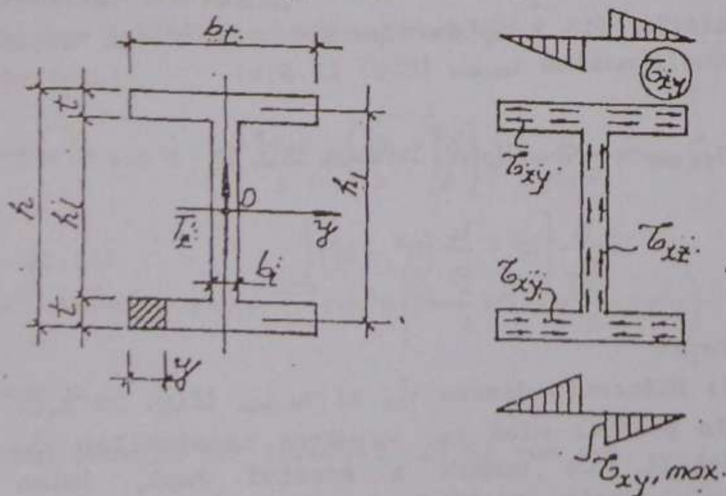


Fig. 13.6

Pentru y = 0, rezultă $\tau_{xy}=0$, iar pentru $y = \frac{1}{2}(b_t - b_i)$ se obține

$$\tau_{xy,max} = \frac{T_z h_1}{4I_y}(b_t - b_i) \qquad (13.14)$$

Privitor la sensul tensiunilor tangențiale din încovoierea cu forță tăietoare, vom observa că pentru $T_z>0$, ele formează un flux (fig. 13.6,b) continuu pornind din cele două aripi ale tălpii inferioare, unindu-se în inimă și separându-se din nou în talpa superioară cu sensuri inverse celor din talpa inferioară. Pentru $T_z<0$ (orientat invers), fluxul tensiunilor arătat în figură 13.6,b s-ar inversa.

Tensiunile τ_{xy} din tălpi sunt, în general, mici motive pentru care de prezența lor se ține seama numai în anumite situații.

13.3 LUNECAREA LONGITUDINALĂ

Tensiunilor tangențiale τ_{xz} dintr-o secțiune transversală a unei grinzi solicitate la încovoiere cu forță tăietoare, în baza principiului dualității tensiunilor tangențiale τ, le corespund tensiuni tangențiale τ_{zx} acționând în plane paralele cu fâșia neutră a barei, numite tensiuni de lunecare (fig. 13.8).

Rezultanta lor pe o lungime e de grindă poartă denumirea de forță de lunecare, notată cu L_e.

Existența tensiunilor de lunecare τ_{zx}, rolul și importanța lor în asigurarea capacității portante a grinzilor solicitate la încovoiere cu forță tăietoare se poate pune în evidență prin următoarea experiență simplă. Se realizează o grindă compusă din 3 bare identice suprapuse de secțiunea transversală bxh fiecare (fig. 13.7,a).

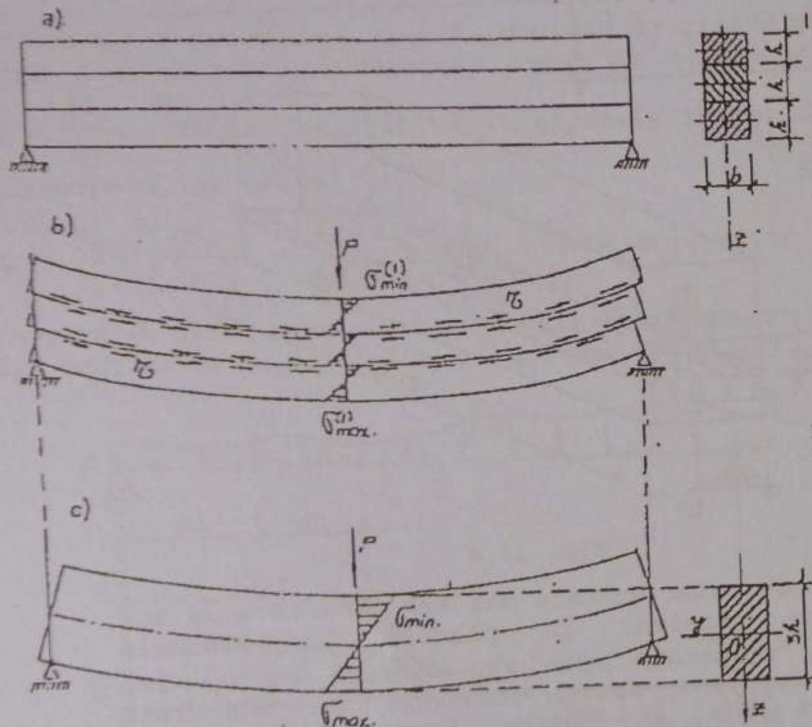


Fig. 13.7

Sub acţiunea forţei P grinda se încovoaie (încovoiere cu forţă tăietoare), luând forma din figura 13.7,b. Analizând forma ei deformată se constată că în fiecare plan de separaţie, fibrele inferioare ale barei superioare se alungesc, iar fibrele superioare ale barei inferioare se scurtează.

Urmare a acestor deformaţii, feţele în contact ale barelor lunecă una în raport cu cealaltă. Cum lunecarea a două secţiuni infinit vecine este rezultatul acţiunii tensiunilor tangenţiale τ din acestea (v. aliniatul 10.1), rezultă că în planele de separaţie dintre barele componente ale grinzii

iau naştere tensiuni tangenţiale, paralele cu axa x, notate cu τ_{zx} (fig. 13.7,b).

Dacă barele componente ar fi solidarizate între ele cu buloane, nituri, sudură, clei, pane etc., acestea ar împiedica lunecarea, iar grinda s-ar comporta ca şi cum ar fi executată dintr-un singur element, de secţiune bx3h (fig. 13.7,c).

Pentru generalizare, în cele ce urmează vom considera grinda alcătuită din n bare identice de secţiune bxh fiecare, în cele două situaţii descrise mai sus.

În cazul grinzii cu elementele nesolidarizate, fiecare bară se va încovoia independent, preluând o forţă $P_1 = \frac{P}{n}$. Tensiunile şi săgeata maximă pe grindă, pe care le vom nota cu $\sigma_{max}^{(1)}$ şi $f_{max}^{(1)}$ vor fi cele produse pe o singură bară, de secţiune bxh, încărcată cu forţa P_1. Vom avea deci:

$$M_{max}^{(1)} = \frac{P_1 \ell}{4} = \frac{P\ell}{4n}; \quad I_y^{(1)} = \frac{bh^3}{12}; \quad W_y^{(1)} = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_{max}^{(1)} = \frac{M_{max}^{(1)}}{W_y^{(1)}} = \frac{P \cdot \ell}{4n} \cdot \frac{1}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2}\frac{P\ell}{nbh^2}.$$

Conform relaţiei (12.24)

$$f_{max}^{(1)} = \frac{P_1 \cdot \ell^3}{48EI_y^{(1)}} = \frac{P\ell^3}{48E \cdot n} \cdot \frac{1}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{P\ell^3}{4nEbh^3}.$$

Grinda cu elementele solidarizate se va comporta la încovoierea cu forţă tăietoare ca o bară de secţiune bxnh încărcată cu forţa P la mijlocul deschiderii, pentru care:

$$M_{max} = \frac{P\ell}{4}; \quad I_y^{(n)} = \frac{b(nh)^3}{12} = \frac{n^3bh^3}{12}$$

$$W_y^{(n)} = \frac{b(nh)^2}{6} = \frac{n^2bh^2}{6};$$

$$\sigma_{max}^{(n)} = \frac{M_{max}}{W_y^{(n)}} = \frac{P\cdot\ell}{4}\cdot\frac{1}{\frac{n^2bh^2}{6}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{P\ell}{n^2bh^2}$$

$$f_{max}^{(n)} = f_{\frac{\ell}{2}}^{(n)} = \frac{P\ell^3}{48EI_y^{(n)}} = \frac{P\ell^3}{48E\cdot\frac{n^3bh^3}{12}} = \frac{P\ell^3}{4n^3Ebh^3}.$$

Din rapoartele tensiunilor şi săgeţilor calculate mai sus, $\frac{\sigma_{max}^{(n)}}{\sigma_{max}^{(1)}} = \frac{1}{n}$; $\frac{f_{max}^{(n)}}{f_{max}^{(1)}} = \frac{1}{n^2}$, rezultă:

$$\sigma_{max}^{(1)} = n\sigma_{max}^{(n)} \qquad (a) \qquad (13.15)$$

$$f_{max}^{(1)} = n^2 f_{max}^{(n)} \qquad (b)$$

Interpretând ecuaţiile (13.15) se deduce că în cazul grinzilor alcătuite din n elemente nesolidarizate, tensiunile sunt mai mari de n ori, iar săgeţile de n^2 ori decât în cazul grinzilor de aceeaşi secţiune cu elementele solidarizate. Altfel spus, o astfel de grindă este de n ori mai puţin rezistentă şi de n^2 ori mai flexibilă.

Pentru stabilirea expresiei forţei de lunecare $\mathcal{L}_e$ se detaşează din grindă un element de lungime dx (fig. 13.8) dintr-o zonă cu forţă tăietoare constantă (fig. 13.8,a). În secţiunile transversale x şi x+dx ale acestuia, forţele tăietoare T_z dau naştere tensiunilor τ_{xz} constante pe lăţimea secţiunii b având direcţia tangentei la contur, paralele cu forţă tăietoare T_z. Intensitatea lor la distanţa z de axa neutră este dată de formula lui Juravski.

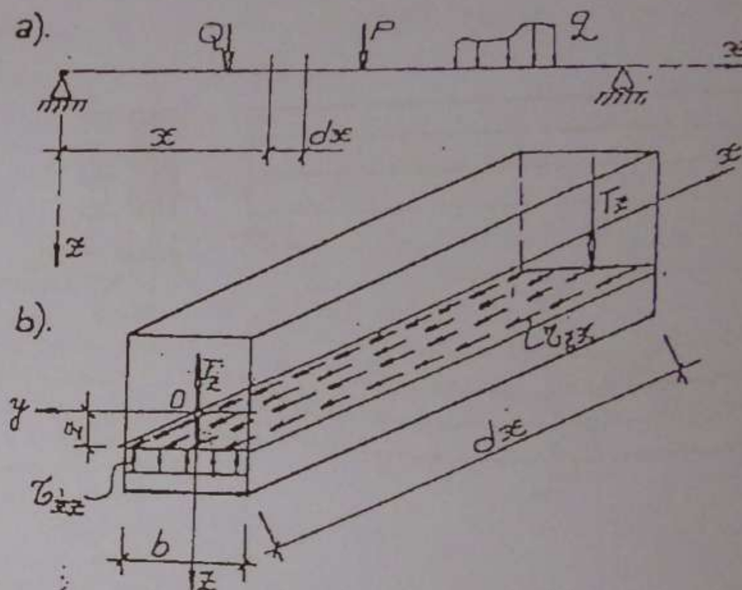


Fig. 13.8

Conform celor arătate mai sus, acestora le vor corespunde tensiuni în planele longitudinale $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, orientate spre sau dinspre muchia lor comună. Cumulând aceste tensiuni pe suprafaţa elementară bdx se obţine forţa de lunecare elementară:

$$d\mathcal{L} = b\cdot\tau_{zx}\cdot dx = b\cdot\frac{T_z\cdot S_y}{bI_y}\cdot dx = \frac{T_z\cdot S_y}{I_y}\cdot dx$$

Pe o lungime de grindă cuprinsă între abscisele x_1 şi x_2, forţa de lunecare longitudinală va avea valoarea:

$$\mathcal{L}_e = \int_{x_1}^{x_2} d\mathcal{L} = \frac{S_y}{I_y}\int_{x_1}^{x_2} T_z dx = \frac{T_z S_y}{I_y}(x_2 - x_1) = \mathcal{L}_e = \frac{T_z\cdot S_y}{I_y}\cdot e \qquad (13.16)$$

în care s-a notat $x_2 - x_1 = e$ lungimea de grindă pe care s-a calculat lunecarea. Având în vedere că $T_z = \frac{dM_y}{dy}$ (conform relației 7.4) expresia forței de lunecare $\mathcal{L}_e$ ia forma:

$$\mathcal{L}_e = \frac{S_y}{I_y} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dM_y}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} dM_y = M_y \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{S_y}{I_y} (M_2 - M_1) \quad (13.17)$$

în care M_1 și M_2 reprezintă momentele încovoietoare M_y din secțiunile de abscise x_1 și x_2 (vezi fig. 13.9).

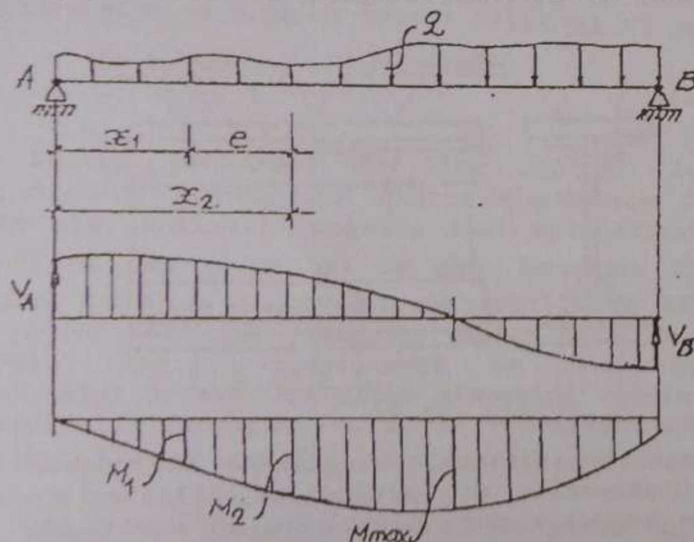


Fig. 13.9

13.4 CALCULUL ELEMENTELOR DE SOLIDARIZARE LA GRINZILE METALICE DE SECȚIUNE COMPUSĂ

Grinzile metalice de secțiune compusă sunt alcătuite dintr-o inimă și două tălpi solidarizate între ele cu sudură (fig. 13.10,a) sau cu nituri (fig. 13.11,a).

Deși total diferite, cele două moduri de asigurare a conlucrării dintre elementele componente ale secțiunii au același rol: preluarea forțelor de lunecare și împiedicarea lunecărilor între inimă și tălpi.

a) *Grinzi compuse solidarizate prin sudură* (fig. 13.10)

În raport de mărimea și natura solicitărilor, grinzile sudate pot fi executate cu sudură continuă (fig. 13.10,b) sau discontinuă (fig. 13.10,c).

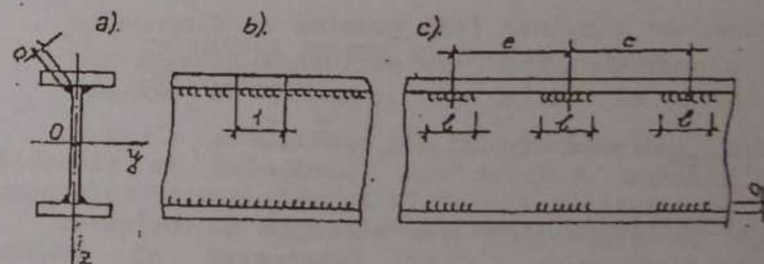


Fig. 13.10

Calculul cordoanelor de sudură continue revine la stabilirea grosimii acestora a. Pentru aceasta, cu relația (13.16) se calculează forța de lunecare $\mathcal{L}$ pe unitatea de lungime:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y} \cdot 1 = \frac{T_z S_y}{I_y} \quad (13.18)$$

Efortul capabil al celor două cordoane de sudură (fig. 13.10,a) pe aceeași lungime unitară, se calculează cu relația (10.23):

$$N_{cap,s} = A_s \cdot R_f^s = 2 \cdot a \cdot 1 \cdot R_f^s$$

Punând condiția ca efortul capabil al sudurii $N_{cap,s}$ să fie mai mare, la limită egal cu forța de lunecare $\mathcal{L}_1$, vom avea: $2 \cdot a \cdot R_f^s = \frac{T_z S_y}{I_y}$, din care rezultă

$$a_{nec} = \frac{T_z S_y}{2 I_y R_f^s} \qquad (13.19)$$

Grosimea a va trebui să îndeplinească concomitent cerința constructivă 3 mm ≤ a ≤ 0,7t, în care t reprezintă grosimea minimă a pieselor care se îmbină. Valoarea rezistenței de calcul la forfecare a sudurii se ia $R_f^s = 0,6R$.

Pentru calculul cordoanelor de sudură discontinue, de lungimea ℓ și grosime a, dispuse la distanța e unul de altul, se evaluează capacitatea lor portantă și forța de lunecare pe această lungime: $N_{cap,s} = 2 \cdot a \cdot \ell_c \cdot R_f^s$; $\mathcal{L}_e = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y} \cdot e$.

Luând la limită condiția $N_{cap,s} \geq \mathcal{L}_e$ se obține:

$$2a\ell_c R_f^s = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y} \cdot e \qquad (13.20)$$

Dimensionarea cordoanelor de sudură revine la stabilirea dimensiunilor acestora (a, ℓ) și a distanței dintre ele (e), în care scop ecuația (13.20) este insuficientă.

Ca urmare a acestui fapt se aleg două dintre necunoscutele a, ℓ și e și se calculează cea de a treia. De regulă se aleg:

- grosimea sudurii a astfel încât aceasta să satisfacă condiția constructivă 3mm ≤ a ≤ 0,7 t_{min};

- lungimea nominală ℓ a cordoanelor de sudură după care se calculează lungimea lor de calcul $\ell_c = \ell - 2a$ (la capete pe câte o lungime a cusăturile de sudură nesatisfăcând cerințele de calitate ale unei suduri de rezistență).

Cu elementele a și ℓ_c cunoscute din relația (13.20) se calculează distanța e dintre cusăturile de sudură:

$$e = \frac{2 \cdot a \cdot \ell_c \cdot I_y \cdot R_f^s}{T_z \cdot S_y} \qquad (13.21)$$

b) *Grinzi de secțiune compusă solidarizate cu nituri (fig. 13.11)*

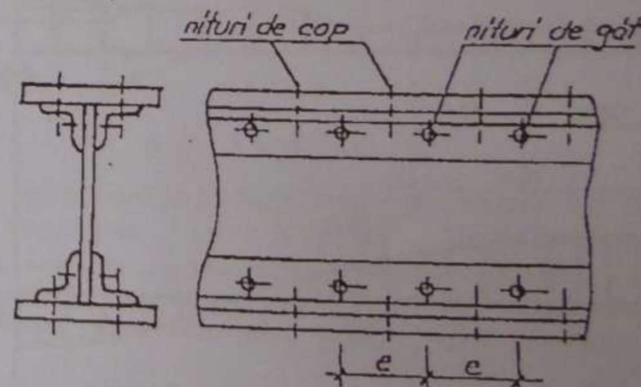


Fig. 13.11

La încovoierea grinzilor realizate în această execuție, platbenzile din alcătuirea tălpilor au tendința de lunecare după planul ce le separă de corniere. Notând cu S_y^p momentul static al platbenzilor față de axa neutră y, forța de lunecare din planul de lunecare precizat, calculată cu relația (13.16) pe o lungime e se va scrie:

$$\mathcal{L}_{1e} = \frac{T_z \cdot S_y^p}{I_y} \cdot e \qquad (13.20)$$

Pe de altă parte, întreg ansamblul tălpii (corniere + platbenzi) are tendința de lunecare în raport de inima secțiunii, după fețele în contact dintre acestea.

Notând cu S_y^t momentul static al întregii tălpi (corniere+platbenzi) în raport cu axa neutră, forța ce ia naștere în planele de lunecare arătate, pe lungimea e se va exprima prin relația

$$\mathcal{L}_{2e} = \frac{T_z \cdot S_y^t}{I_y} e \qquad (13.23)$$

Pentru preluarea forțelor $\mathcal{L}_{1e}$ și $\mathcal{L}_{2e}$; și împiedicarea lunecărilor dintre elementele componente ale secțiunii, acestea sunt solidarizate cu nituri de cap și nituri de gât. Deoarece $S_y^t > S_y^p$ rezultă că $\mathcal{L}_{2e} > \mathcal{L}_{1e}$ astfel că niturile de gât vor fi solicitate mai puternic decât cele de cap. Calculul lor de rezistență se face conform aliniatului 10.4.a: se alege diametrul nitului din considerații constructive și se stabilește efortul capabil al unui nit $N_{1,cap}^n$ din condiția de forfecare și strivire cu relația (10.14).

Având în vedere că fiecare nit preia forța de lunecare de pe lungimea de grindă e, condiția de rezistență a îmbinării se va exprima prin relația: $N_{1,cap}^n \geq \mathcal{L}_{2e}$, care luată la limită conduce la egalitatea $N_{1,cap}^n = \frac{T_z S_y^t}{I_y} e$, din care se calculează distanța maximă ce poate fi prevăzută între nituri:

$$e_{max} = \frac{I_y \cdot N_{1,cap}^n}{T_z \cdot S_y^t} \qquad (13.21)$$

Distanța e adoptată trebuie să se încadreze în distanțele constructive (maxime și minime) prvăzute în normele tehnice privitoare la executarea construcțiilor metalice nituite.

Niturile de cap 1, mai puțin solicitate, se dispun constructiv la aceeași distanță e, intercalate între niturile de gât (fig. 13.11 a,b).

13.5 INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA DEPLASĂRILOR

Grinzile solicitate la încovoiere cu forța tăietoare se deformează sub efectul cumulat al momentelor încovoietor și al forțelor tăietoare.

Rotirile și săgețile din încovoiere au fost sudiate în paragraful 12.3, stabilindu-li-se ecuația diferențială și modul de calcul.

Forța tăietoare pe o grindă are ca efect deplasarea (lunecarea) relativă a două secțiuni vecine care determină o săgeată suplimentară (W_t).

Fie dx distanța dintre cele două secțiuni și dw_T lunecarea lor relativă, egală cu deplasarea O_1O_1' a punctului O_1 pe verticală (fig. 13. 12).

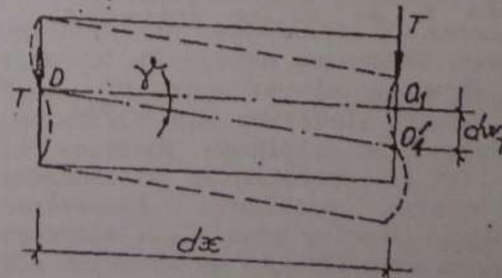


Fig. 13.12

Deformația unghiulară corespunzătoare acestei deplasări este reprezentată prin unghiul γ_m format de axa nedeformată OO_1 cu axa deviată OO_1'.

Din considerente matematice

$$tg\gamma \equiv \gamma_m = \frac{O_1O_1'}{dx} = \frac{dw_T}{dx}.$$

Pe de altă parte, în baza legii lui Hooke $\gamma_m = \frac{\tau}{G}$, în care G reprezintă modulul de elasticitate transversală a materialului din componenta grinzii. Egalând valorile γ_m stabilite mai sus se obține

$$\frac{dw_T}{dx} = \frac{\tau}{G} \qquad (13.25)$$

Tensiunea tangențială τ, prezentând o distribuție neuniformă pe secțiune (fig. 13.3, 13.4, 13.5) poate fi scrisă sub forma

$$\tau = k \cdot \frac{T_z}{A} \qquad (13.26)$$

k reprezentând un coeficient care ține seama de neuniformitatea tensiunilor pe înălțimea secțiunii.

Pentru secțiunile dreptunghiulare, circulare și în formă de I, k ia valorile 1,20;1,10 și respectiv 2,00...2,50.

Înlocuind relația (13.26) în ecuația (13.25) se obține:

$$\frac{dw_T}{dx} = k \cdot \frac{T_z}{GA} \qquad (13.27)$$

care reprezintă ecuația diferențială a axei deformate din forță tăietoare. Similar deplasărilor din încovoiere, săgeata w_T se obține integrând ecuația (13.27):

$$w_T = \frac{k}{GA}\int T_z dx + C \qquad (13.28)$$

Dacă T_z = constant, $w_T = \frac{kT_z}{GA}x + C$. Constanta C se determină din condiții limită.

Pentru exemplificare vom determina în continuare săgeata pe o consolă încovoiată cu o sarcină concentrată la capătul ei liber (fig. 13.13).

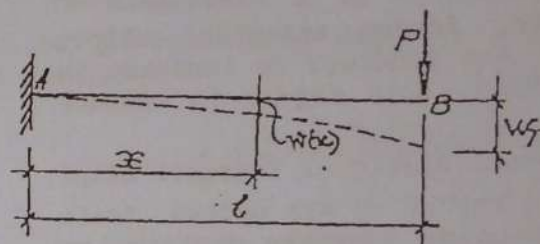


Fig. 13.13

În acest caz, T_z = P = constant iar ecuația diferențială a axei deformate a barei din forță tăietoare (13.27) devine

$$\frac{dw_T}{dx} = k\frac{P}{GA}.$$

Integrând o dată, se obține $w_T = \frac{kP}{GA}x + C$, în care C reprezintă o constantă de integrare care se determină din condiția ca în secțiunea de încastrare (x=0), săgeata să fie nulă (w_T = 0). Introducând condiția în ecuația de mai sus, rezultă C = 0 și apoi

$$w_T = \frac{kP}{GA} \cdot x \qquad (13.29)$$

Pentru $x = \ell$, se obține săgeata maximă din forța tăietoare:

$$w_{T,max} = f_T = \frac{kP}{GA} \cdot \ell \qquad (13.30)$$

Săgeata totală la capătul liber al consolei se compune din săgețile date de momentul încovoietor (relația 12.26') și forța tăietoare (relația 13.30) va fi:

$$f = f_M + f_T = \frac{Pl^3}{3EI_y} + \frac{kP}{GA} = \frac{Pl^3}{3EI_y}\left(1 + \frac{3kEI_y}{GAl^2}\right)$$

Pentru bara de secțiune dreptunghiulară

$$k = \frac{6}{5} = 1,2, \quad \frac{I_y}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{2}$$ astfel că vom avea:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_y}\left(1 + \frac{3E}{10G} \cdot \frac{h^2}{l^2}\right) \qquad (13.31)$$

Se observă cu ușurință că săgeta suplimentară produsă de forța tăietoare depinde de raportul $\frac{h^2}{l^2}$.

Pentru grinzile obișnuite, acest supliment este în jur de 4% din săgeata dată de moment, motiv pentru care deformațiile acestora se calculează numai din acțiunea momentului, conform celor arătate în paragraful 12.3.

La grinzile scurte și înalte, puternic solicitate, aportul deformațiilor din forța tăietoare devine important și trebuie luat în calcul.

13.6 CALCULUL PRACTIC DE REZISTENȚĂ LA ÎNCOVOIEREA CU FORȚĂ TĂIETOARE

Din acțiunea simultană a eforturilor M_y și T_z într-o secțiune transversală a unei grinzi încovoiate iau naștere atât tensiuni normale σ - maxime în fibrele extreme - cât și tensiuni tangențiale τ maxime în axa neutră.

Întrucât cedarea (ruperea) unei grinzi într-o secțiune poate fi produsă atât de tensiunile normale cât și de cele tangențiale, la încovoierea cu forță tăietoare este necesar a fi impuse două condiții de rezistență, ambele obligatorii în toate secțiunile grinzii:

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} \le R \qquad (13.32)$$

$$\tau_{max} = \frac{T_z \cdot S_y^0}{b_0 I_y} \le R_f, \qquad (13.33)$$

în care S_y^0 reprezintă momentul static în raport cu axa y a părții de secțiune cuprinse între z = 0 și $z = z_{max}$ iar b_0 lățimea secțiunii ce lunecă la cota z = 0. Condiția de rezistență în tensiunile normale σ este utilizată cu totul identic ca și în cazul încovoierii pure (v. aliniatul 12.4). Spre deosebire de aceasta, condiția de rezistență în tensiuni τ este folosită numai la verificarea și stabilirea capacității portante. Verificarea unei secțiuni revine la compararea tensiunii efective τ_{max} cu rezistența de calcul a materialului la forfecare R_f. Secțiunea satisface condiția de rezistență atunci când relația (13.33) este verificată. Capacitatea portantă a unei secțiuni este atinsă atunci când $\tau_{ef} = R_f$. Introducând această egalitate în relația (13.33) se obține

$$T_{z,cap} = \frac{b_0 I_y \cdot R_f}{S_y^0} \qquad (13.34)$$

La dimensionarea grinzilor este folosită numai condiția de rezistență în tensiuni normale σ cu ajutorul căreia se determină modulul de rezistență $W_{y,nec}$, în baza căruia se stabilesc dimensiunile geometrice ale secțiunii. Odată acestea adoptate, se verifică condiția de rezistență la tensiuni tangențiale cu relația (13.33). Dacă calculul de rezistență urmărește determinarea încărcării capabile P_{cap} a unei grinzi, cerințele de rezistență ale acesteia se exprimă prin condiția ca eforturile maxime produse de încărcarea exterioară M_y (P) și

$T(P)$ să fie inferioare la limită egale cu eforturile capabile ale secțiunii barei:

$$\begin{aligned} T_z(P) &= T_{z,cap} \\ M_y(P) &= M_{y,cap} \end{aligned} \qquad (13.35)$$

Cele două egalități conduc la două valori, una din condiția de forță tăietoare P^T_{cap} și alta din condiția de moment P^M_{cap}.

Forța capabilă a grinzii va fi reprezentată de valoarea minimă: $P_{cap} = \min\left\{P^T_{cap}; P^M_{cap}\right\}$.

13.7 TENSIUNI TANGENȚIALE ÎN SECȚIUNI LA CARE FORȚA TĂIETOARE NU ACȚIONEAZĂ DUPĂ O AXĂ DE SIMETRIE. CENTRU DE ÎNCOVOIERE SAU FORFECARE

La grinzile ce prezintă un plan de simetrie longitudinală, confundat cu planul încărcărilor exterioare, forță tăietoare T_z, conținută și ea în planul forțelor, este dirijată după axa de simetrie a secțiunii (fig. 13.3, 13.4, 13.5), formează un sistem static echivalent cu tensiunile tangențiale τ_{xz}, exprimat prin relația (6.8):

Dacă însă planul forțelor conține o axă principală de inerție a secțiunii, care nu este și axă de simetrie, forța tăietoare T_z trecând prin centrul de greutate al secțiunii și dirijată după axa menționată, nu va mai forma un sistem echivalent cu tensiunile tangențiale τ din secțiune.

Pentru ilustrare vom considera o grindă realizată dintr-un profil U încărcată în planul principal de inerție Oxz cu forța concentrată P (fig. 13.14,a).

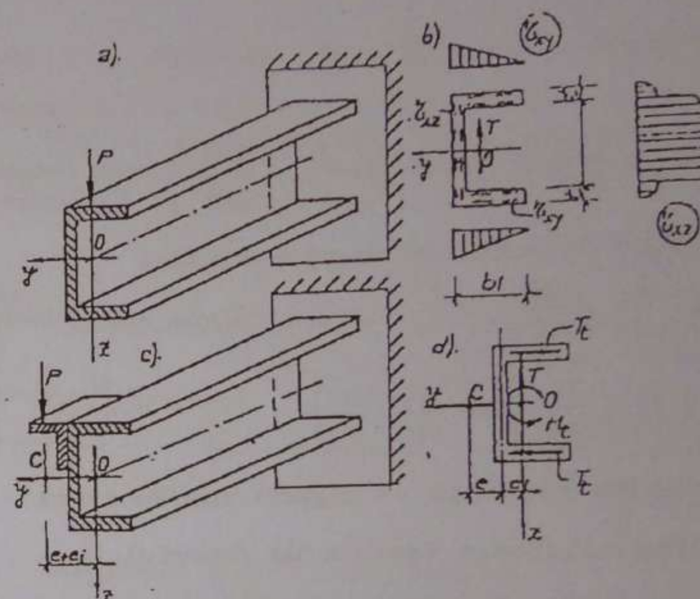


Fig. 13.14

Din acțiunea forței tăietoare rezultate $T_z = P$, în secțiunile barei iau naștere tensiuni tangențiale τ al căror flux, obținut cu formula lui Juravski printr-un calcul similar celui efectuat în aliniatul 13.2,c pentru profilul I, este indicat în figura 13.14,b.

Cu notațiile din figură, rezultanta tensiunilor τ_{xy} din tălpi T_t va avea valoarea

$$T_t = \frac{1}{2}\tau_{xy,max} \cdot b_1 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \frac{Tb_1t}{2t \cdot I_y}h_1 \cdot b_1t = \frac{Tb_1^2h_1t}{4I_y} \quad (13.36)$$

La rândul ei, rezultanta T_i a tensiunilor τ_{xz} din inimă, poate fi aproximată cu suficientă precizie cu forța T din secțiune.

Introducând forțele T_i și T_t în centrele de greutate ale ariilor tălpilor și inimii se obține sistemul arătat în figura 13.14,c. Reducând forțele acestuia în centrul de greutate O al secțiunii se

obţine o forţă tăietoare $T_z = T_1$ şi un moment de torsiune $M_t = T_t \cdot h_1 + T_1 \cdot e_1$, prin urmare, din acţiunea forţei P acţionând în planul xOz în secţiunile consolei ia naştere un flux al tensiunilor τ echivalent cu forţă tăietoare T_z.

Prin aceasta, starea de solicitare a barei devine mai complexă, la momentul încovoietor M_y şi forţa tăietoare T_z, adăugându-se şi un moment de torsiune M_t. Dacă planul de acţiune al forţelor P ar fi translatat într-un punct C de pe axa de simetrie a secţiunii, la distanţa e de linia mediană a inimii astfel încât forţa P să producă în centrul de greutate O un moment $M_{t,P} = P(e+e_1)$ egal şi de sens opus cu momentul $M_t = T_t \cdot h_1 + T_1 \cdot e_1$ al forţelor T_1 şi T_t, cele două momente s-ar anula reciproc, iar secţiunea barei ar rămâne solicitată numai la încovoiere şi forfecare (fig. 13.14,d):

Vom căuta deci poziţia punctului C din condiţia $M_{t,P} = M_t$:

$$P(e + e_1) = T(e + e_1) = T_t h_1 + T \cdot e_1 \text{ sau}$$

$$T \cdot e + T \cdot e_1 = T_t \cdot h_1 + T \cdot e_1$$

din care

$$e = \frac{T_t \cdot h_1}{T} = \frac{T \cdot b_1^2 h_1^2 t}{4 I_y T} = \frac{b_1^2 h_1^2}{4 I_y} t \qquad (13.37)$$

Punctul C definit şi determinat ca mai sus, poartă denumirea de *centru de încovoiere* sau *forfecare* a secţiunii.

Dacă forţa exterioară P trece prin acest punct, între fluxul tensiunilor τ şi efortul secţional T_z va exista echivalenţă, iar grinda va fi solicitată numai la încovoiere şi forfecare, nu şi la torsiune. Privitor la poziţia centrului de încovoiere la secţiunile de grinzi uzuale, aceasta este următoarea:

- în centrul de simetrie, în cazul secţiunilor prezentând două axe de simetrie (fig. 13.15,a)
- pe axa de simetrie, în cazul barelor prezentând o astfel de axă (fig. 13.15 b,c)
- în punctul de intersecţie al axelor drepte ale dreptunghiurilor componente ale secţiunilor compuse într-o astfel de alcătuire (fig. 13.15,d,e şi f).

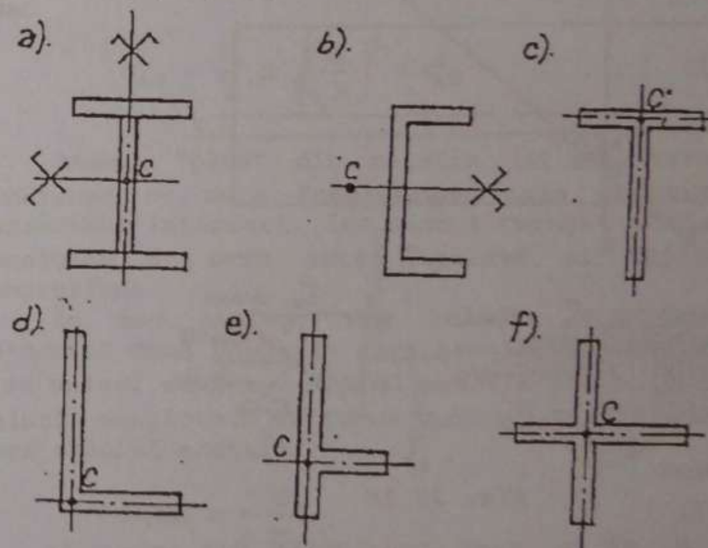


Fig. 13.15

13.8 TENSIUNI PRINCIPALE ŞI DIRECŢII PRINCIPALE LA ÎNCOVOIEREA CU FORŢĂ TĂIETOARE

Aşa cum s-a arătat în paragraful 13.1, în punctele secţiunilor normale ale barelor solicitate la încovoierea cu forfecare iau naştere tensiuni normale σ, date de formula lui Nevier şi tensiuni tangenţiale τ date de formula lui Juravski.

Sunt oare aceste tensiuni cele mai mari ce pot apare într-un punct considerat?

În secțiuni, altele decât cele normale, trecând prin același punct, nu apar oare tensiuni normale și tangențiale superioare celor din secțiunile normale?

Pentru cunoașterea răspunsului la aceste întrebări se efectuează așa-numitul studiu al stării de tensiune în jurul unui punct.

În acest scop se detașează din jurul punctului considerat o prismă infinitezimală obținută prin secționarea grinzii cu planul normal 1-1, planul longitudinal paralel cu fâșia neutră 2-2 și cu planul înclinat 3-3 (fig. 13.16).

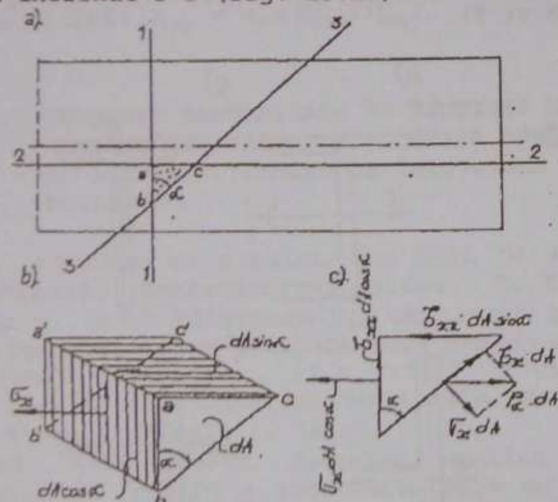


Fig. 13.16

Dacă σ_x și τ_{xz} sunt tensiunile din punct în secțiunea normală, în baza principiului dualității tensiunilor tangențiale τ în secțiunea longitudinală acc'a' vor lua naștere tensiuni $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ (fig. 13.16,b și c).

Distribuite uniform pe fețele în care apar, tensiunile menționate reprezintă efectul părților înlăturate în secțiunile respective. Înlocuind același efect în secțiunea înclinată bcc'b' prin

tensiunile totale p_α, de componente σ_α și τ_α, continue și uniform distribuite în secțiune, prisma elementară izolată (fig. 13.16,b) va fi solicitată în același mod ca și în grindă (fig. 13.16,a). Notând cu dA suprafața înclinată bcc'b', ariile suprafețelor abb'a' și acc'a' vor fi dAcosα și dAsinα, iar rezultantele tensiunilor de pe ele $\sigma_\alpha dA$, $\tau_\alpha dA$, $\sigma_x dA\cos\alpha$, $\tau_{xz} dA\cos\alpha$ și $\tau_{zx} dA\sin\alpha$, cu sensurile și direcțiile din figura 13.16,c.

Exprimând echilibrul acestora prin două ecuații de proiecții nule pe direcția σ_α și τ_α se obține:

$$\sigma_\alpha dA-\sigma_x\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\tau_{xz}\cdot dA\cos\alpha\cdot\sin\alpha-\tau_{zx}dA\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0,$$

$$\tau_\alpha dA-\sigma_x dA\cos\alpha\sin\alpha+\tau_{xz}\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\tau_{zx}dA\sin\alpha\cdot\sin\alpha=0.$$

Având în vedere că $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, relațiile devin:

$$\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+2\tau_{xz}\sin\alpha\cos\alpha;\ \tau_\alpha=\sigma_x\cos\alpha\sin\alpha-\tau_{xz}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

care se mai scriu:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\alpha)+\tau_{xz}\sin 2\alpha \qquad (13.38,a)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha-\tau_{xz}\cos 2\alpha \qquad (13.38,b)$$

Relațiile (13.38,a) și (13.38,b) pun în evidență că tensiunile σ_α și τ_α într-o secțiune înclinată trecând prin punct, variază cu înclinarea acesteia, notată cu unghiul α.

Pentru determinarea valorilor extreme ale acestora, de interes deosebit în calculele de rezistență, vom anula succesiv derivatele în raport cu α a funcțiilor σ_α și τ_α date de relațiile (13.38,a) (13.38,b). Efectuând derivatele menționate se obține:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d_\alpha} =- \sigma_x \sin 2\alpha+2\tau_{xz}\cos 2\alpha =$$

$$= -2\left(\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xz}\right)\cos 2\alpha = -2\tau_{xz} = 0 \quad (13.39a)$$

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = \sigma_x \cos 2\alpha + 2\tau_{xz}\sin 2\alpha = 0 \quad (13.39b)$$

Din relațiile de mai sus se deduce că tensiunile σ_α au valori extreme în secțiunea în care tensiunile τ_{xz} sunt nule (de anulare a derivatei $\frac{d\sigma_\alpha}{dx}$). Notând cu α_1 secțiunile în care acestea iau naștere, din aceeași relație se obține ecuația

$$tg2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x} \quad (13.40)$$

a cărei soluție generală are forma: $2\alpha_1 = 2\alpha' + k\pi$ ($k = 0,1$ și $0 < \alpha' < \pi$).

Pentru k=0 și k=1 se obțin două direcții ($\alpha_1 = \alpha'$ și $\alpha_1' = \alpha' + \frac{\pi}{2}$), ortogonale între ele, în care tensiunile normale σ iau valori extreme, maxime și minime. Secțiuni având aceste direcții se numesc *secțiuni principale* iar tensiunile din ele, *tensiuni normale principale*.

Pentru determinarea acestora, se înlocuiesc în ecuația (13.38,a) funcțiile trigonometrice $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$ prin tangenta unghiului dublu ($tg2\alpha$) din relația (13.40):

$$\sin 2\alpha_1 = \pm\frac{tg2\alpha_1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha_1}} = \pm\frac{\tau_{xz}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}}$$

$$\cos 2\alpha_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha_1}} = \pm\frac{\frac{\sigma_x}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}}$$

Notând σ_1 și σ_2 tensiunile normale principale, cu precizările de mai sus, se obține:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \left[\frac{\frac{\sigma_x}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}}\right],$$

sau

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (13.41)$$

Semnul "plus" din relația (13.41) determină tensiunea σ_1 care întotdeauna este pozitivă și reprezintă întindere, iar semnul "minus" conduce la tensiunea σ_2 care este negativă și reprezintă compresiune.

În mod analog, din relația (13.39,b) se determină două plane în care tensiunile tangențiale τ au valori extreme. Notând poziția acestora cu α_2, relația menționată ia forma $\sigma_x\cos 2\alpha_2 + 2\tau_{xz}\sin 2\alpha_2 = 0$ din care rezultă ecuația

$$tg2\alpha_2 = -\frac{\sigma_x}{2\tau_{xz}} \quad (13.42)$$

a cărei soluție generală are forma $2\alpha_2 = 2\alpha_2' + k\pi$ ($k = 0,1$ și $0 < \alpha_2' < \pi$). Pentru k=0 și k=1, se obțin două direcții $\alpha_2 = \alpha_2'$ și $\alpha_2' = \alpha_2' + \frac{\pi}{2}$.

Pentru găsirea valorii tensiunilor τ din aceste secțiuni, numite *tensiuni tangențiale principale*, notate cu τ_1 și τ_2 se înlocuiesc funcțiile $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$ din ecuația (13.38,b), în

funcţie de tangenta unghiului dublu dată de relaţia (13.41):

$$\sin 2\alpha_2 = \pm\frac{tg2\alpha_2}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha_2}} = \pm\frac{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}}$$

$$\cos 2\alpha_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha_2}} = \pm\frac{\tau_{xz}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}}$$

Vom obţine:

$$\tau_{1,2} = \frac{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}$$

sau

$$\tau_{1,2} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \qquad (13.43)$$

Făcând produsul $tg2\alpha_1 \cdot tg2\alpha_2 = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x}\left(-\frac{\sigma_x}{2\tau_{xz}}\right) = -1$, rezultă că direcţiile $2\alpha_1$ şi $2\alpha_2$ sunt ortogonale, adică diferă cu $\frac{\pi}{2}$, prin urmare $2\alpha_1 = 2\alpha_2 + \frac{\pi}{2}$, -au $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{4}$, în consecinţă, secţiunile în care apar tensiunile tangenţiale maxime formează cu secţiunile în care apar tensiunile normale maxime, unghiuri de 45°.

Tensiunile principale σ_1, σ_2, τ_1 şi τ_2 diferă de la un punct la altul al unei secţiuni şi de la o secţiune la alta a unei grinzi întrucât şi tensiunile σ_x şi τ_{xz} variază pe înălţimea unei

secţiuni şi în lungul grinzii. Deoarece condiţiile de rezistenţă a unei grinzi impun ca tensiunile maxime de întindere, de compresiune şi de forfecare din orice punct să fie inferioare rezistenţelor de calcul la întindere, compresiune şi forfecare ($\sigma_{1,max} \le R_i, \sigma_{2,max} \le R_c, \tau_{max} \le R_f$) apare nevoia stabilirii punctelor în care apar tensiunile principale maxime. Selectarea acestora pe cale analitică este însă dificilă. Având în vedere structura relaţiilor (12.7) şi (13.1) este evident că acestea trebuie căutate în puncte ale secţiunilor în care eforturile M_y şi T_z au simultan valori mari. Pentru aceasta, în aceste secţiuni se trasează diagrame σ_1, σ_2 şi τ_{12} folosind în acest scop relaţiile (13.41) şi (13.43).

La secţiunile dreptunghiulare (fig. 13.17) şi în în general la cele fără salturi bruşte, tensiunile σ_1, σ_2 nu depăşesc tensiunile extreme $\sigma_{x,max}$, $\sigma_{x,min}$ din secţiunea normală respectivă.

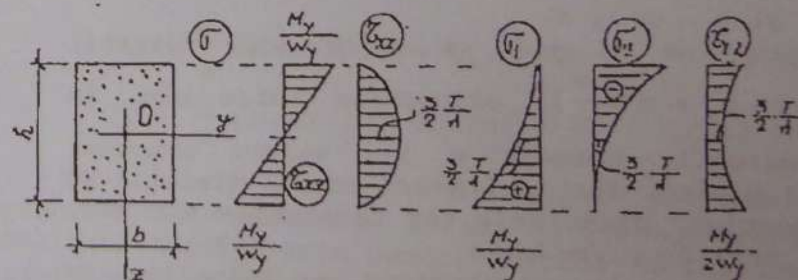
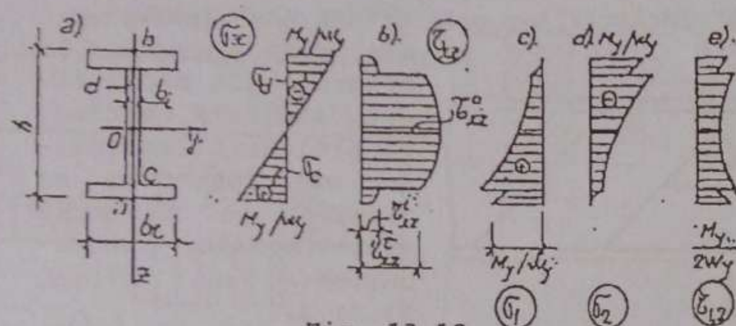


Fig. 13.17

În cazul grinzilor având secţiunea în formă de I (fig. 13.18) şi în general atunci când secţiunea prezintă variaţii bruşte de alcătuire, tensiunile principale maxime pot avea loc şi în alte puncte decât cele situate pe fibrele extreme. Situaţia este specifică grinzilor de secţiune compusă



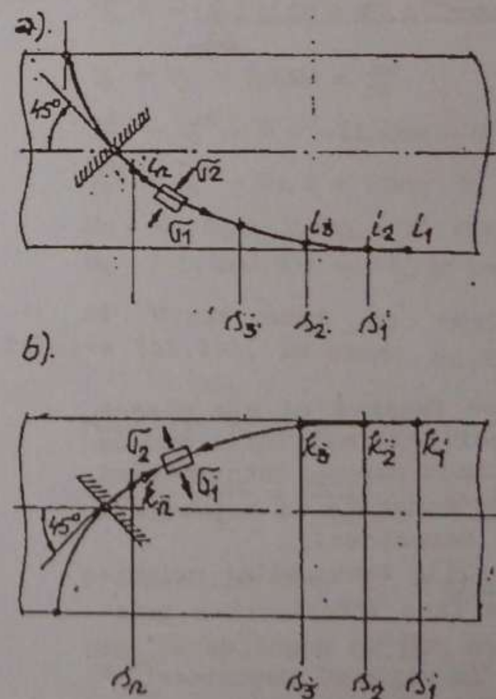
nituite sau sudate la care tensiunile principale în punctele de pe linia de contact a inimii cu talpa pot atinge valori mai mari decât cele din fibrele extreme (dar nu mult diferite de acestea). La profilele laminate, datorită grosimii inimii suficient de mare, la rapoarte obişnuite între M_y şi T_z, tensiunile principale maxime σ_1 şi σ_2 corespund tensiunilor $\sigma_{x,max}$ şi $\sigma_{x,min}$ din fibrele extreme.

Pe baza precizărilor de mai sus, în calculul de rezistenţă al grinzilor solicitate la încovoiere cu forfecare, sunt utilizate tensiunile din secţiunile normale $\sigma_{x,max}$, $\sigma_{x,min}$ în locul tensiunilor principale σ_1 şi σ_2.

13.9 TRAIECTORIILE TENSIUNILOR NORMALE PRINCIPALE LA GRINZILE ÎNCOVOIATE

Aşa cum s-a văzut în aliniatul 13.8, tensiunilor σ_x şi τ_{xz} de pe feţele unui element infinitezimal decupat din jurul unui punct le corespund două direcţii (1-1 şi 2-2) ortogonale date de relaţia (13.40), după care iau naştere cele două tensiuni extreme: σ_1 de întindere şi σ_2 de compresiune.

Dacă într-un punct arbitrar i_1 al unei secţiuni s_1-s_1 dintr-o grindă încovoiată se determină direcţia 1-1 a tensiunii σ_1 şi se prelungeşte până în secţiunea infinit vecină s_2-s_2 se obţine punctul i_2. Calculând şi în acest punct direcţia 1-1 a tensiunii σ_1 şi prelungind-o până la următoarea secţiune infinit vecină, se va obţine un alt punct i_3 (fig. 13.19,a). Continuând această construcţie pentru o serie de puncte şi secţiuni succesive, se obţine o linie frântă care la limită devine o linie curbă numită *traiectoria tensiunii principale* σ_1.



În mod cu totul analog, pornind din punctul arbitrar k_1 se obţin punctele $k_2, k_3 ... k_n$ şi *traiectoria tensiunii principale* σ_2 (fig. 13,19,b).

Fiecare din cele două traiectorii se bucură de proprietatea că în orice punct al lor, tensiunile principale σ_1 şi respectiv σ_2 sunt tangente la curba respectivă. Pornind din alte două puncte i_1' şi k_2' se obţin alte două traiectorii ş.a.m.d.

Rezultă astfel două familii de curbe reprezentând *traiectoriile tensiunilor principale de întindere* σ_1 şi respectiv, *traiectoriile tensiunilor principale de compresiune* σ_2. Deoarece în fiecare punct

direcţiile 1-1 şi 2-2 sunt perpendiculare, rezultă că cele două familii de curbe sunt ortogonale. În figura (13.20,a) sunt prezentate traiectoriile tensiunilor principale la o grindă de secţiune dreptunghiulară simplu rezemată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

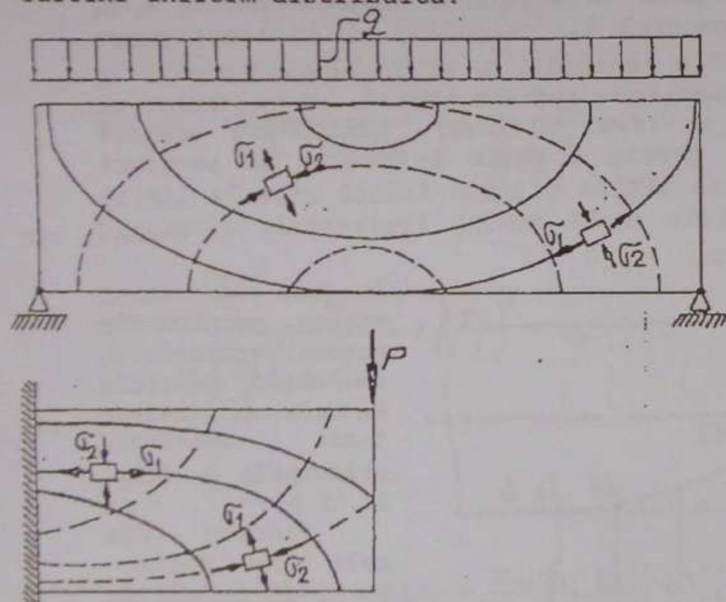


Fig. 13.20

Urmărind traseul acestora se observă că ele pleacă din punctele de pe faţa superioară a grinzii sub un unghi drept, îşi reduc continuu panta, intersectând fâşia neutră la 45° şi ajung tangente la orizontală în secţiunea de la mijlocul deschiderii.

La rândul lor, traiectoriile tensiunilor principale σ_2 pornesc normal de la faţa inferioară a grinzii, taie şi ele fâşia neutră sub un unghi de 45° şi ajung tangente la orizontală la mijlocul deschiderii.

Pentru o consolă încărcată cu o forţă concentrată la capătul liber, traiectoriile tensiunilor principale sunt arătate în figura 13.20,b.

Cunoaşterea traiectoriilor tensiunilor principale σ_1 şi σ_2 prezintă o importanţă deosebită în alcătuirea raţională şi dimensionarea unor elemente de construcţie, oferind imaginea "scurgerii" încărcărilor prin grindă până la reazem.

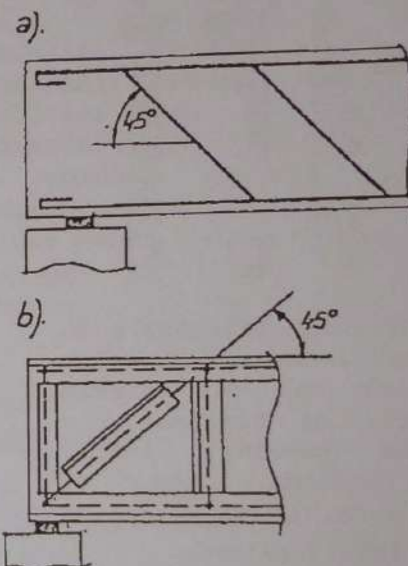


Fig. 13.21

Aşa spre exemplu, la grinzile din beton armat, armătura destinată preluării tensiunilor de întindere se dispune pe direcţia traiectoriilor tensiunilor σ_1 (fig. 13.21,a).

La grinzile metalice puternic solicitate cu grosime mică a inimii, la reazeme se dispun rigidizări după direcţia tensiunilor σ_2 (fig. 13.21,b) pentru preluarea acestor tensiuni şi împiedicarea pierderii stabilităţii prin deformaţii laterale.

13.10 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 13.10.1 Grinda de lemn a planşeului unei case este scoasă cu un capăt în consolă cu ℓ=1,20m (fig.13.22). Secţiunea transversală a grinzii are dimensiunile de 15x20 cm. Cunoscând R=120daN/cm² se cere:

a) Verificarea de rezistenţă a grinzii;

b) Diagramele σ şi τ în secţiunea B^{dr};

c) Săgeata şi rotirea grinzii în C ($E=0,1\cdot10^6$ daN/cm²); P = 20KN, q = 10KN/m

Rezolvare

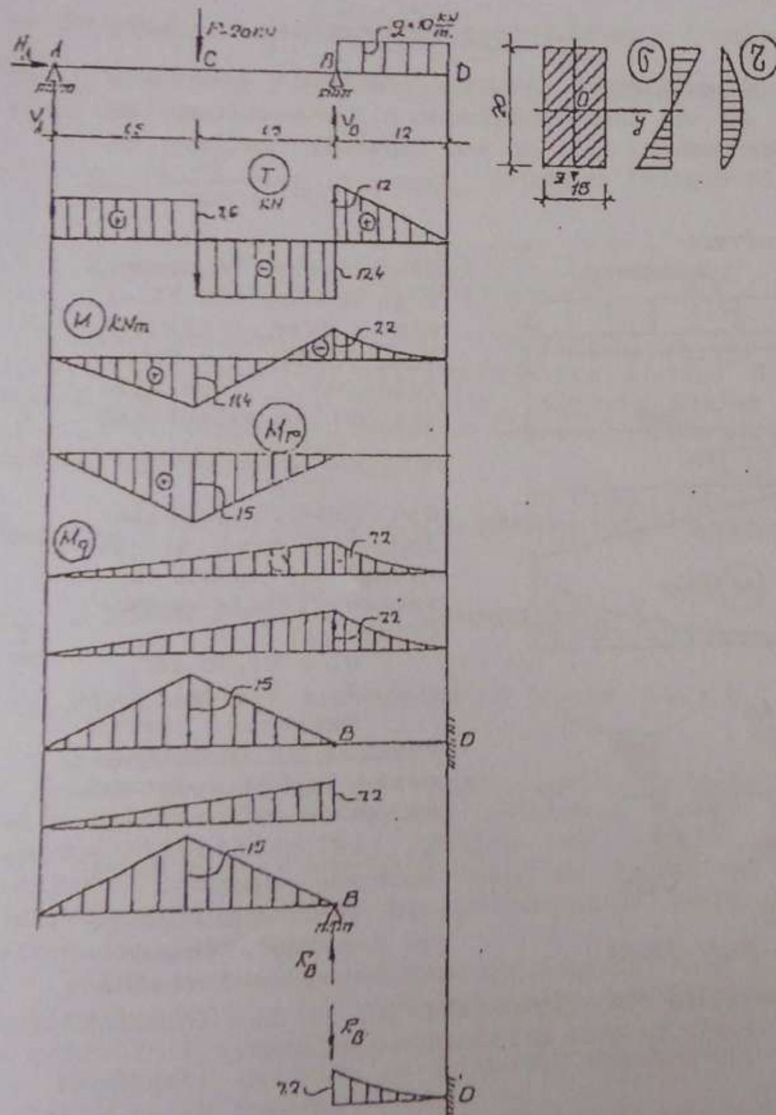


Fig. 13.22

- Se trasează diagramele T şi M, calculând în prealabil reacţiunile şi eforturile în secţiunile caracteristice.

$R_x = \sum Fix = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\sum M_B = 0;\ 3V_A - 1,5P + 1,2q \times 0,6 = 0 \rightarrow$

$V_A = \frac{1}{3}(1,5 \times 20 - 1,2 \times 6) = 7,6kN$

$\sum M_A = 0;\ 3V_B - 1,5P - 1,2q \cdot 3,6 = 0 \rightarrow$

$V_B = \frac{1}{3}(1,5 \times 20 + 43,2) = 24,4kN$

$T_A = V_A = 7,6KN = T_C^{st}$

$T_C^{dr} = T_C^{st} - P = -12,4kN = T_B^{st}$

$T_B^{dr} = T_B^{st} + 24,4 = 12kN;\ T_D = 0$

$M_A = 0;\ M_C = 1,5V_A = 11,4kNm;$

$M_D = -1,2x0,6 \cdot q = -7,20\ kNm;$

a) Verificarea de rezistenţă se face cu relaţia (12.29), în care:

$M_{max}=11,4\ kNm;\ W_y = \frac{bh^2}{6} = 15x\frac{20^2}{6} = 1000cm^3$

$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{114000}{1000} = 114daN/cm^2 < R = 120daN/cm^2$

b) $M_B=-7,20\ kNm;\ T_B^{dr} = 1,2x10 = 12kN$

$\sigma_{B,\frac{max}{min}} = \pm\frac{M_B}{W_y} = \pm\frac{72000}{1000} \pm 72\ daN/cm$

$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{I}{A} = 1,5 \cdot \frac{1200}{300} = 4daN/cm^2$

Diagramele σ şi τ în secţiunea B^{dr} sunt date în figura 13.22,b.

c) Pentru calculul deformațiilor φ_D și w_D se utilizează metoda Mohr încărcându-se grinda conjugată (fig. 13.22,d) cu diagramele M_P și M_q (fig. 13.22,c) provenind din fiecare încercare simplă luată separat.

Conform relațiilor (12.19) și (12.20) deformațiile la capătul consolei se vor calcula cu relațiile: $\varphi_D = \frac{T_{f.D}}{EI_y}$; $w_D = \frac{M_{f.D}}{EI_y}$.

Rezolvarea grinzii conjugate și calculul eforturilor $T_{f.D}$ și $M_{f.D}$ se face conform §7.3.2, divizând grinda Gerber în structurile static determinate AB și BD (fig. 13.22,d). Se obțin:

$$R_B = +11,25 - 7,20 = 4,05 \text{ kNm}^2$$

$$R_A = +11,25 - 3,6 = 7,65 \text{ kNm}^2$$

Cu acestea:

$$T_{fD} = -R_B + \frac{1}{3}7,8\times1,2 = -1,38\text{kNm}^2$$

$$M_{fD} = \frac{1}{3}\cdot 7,8\times 1,2\times\frac{3}{4}1,2 - 1,2R_B = 2,052\text{kNm}^3$$

$$I_y = \frac{15\times 20^3}{12} = 10000\text{cm}^4$$

$$\varphi_D = -\frac{1,38\times10^6}{0,1\times10^6\times10000} = -1,38\cdot10^{-3}\text{rad}$$

$$w_D = -\frac{2,052\times10^8}{0,1\times10^6\times10000} = -0,2052 \text{ cm}.$$

Semnele minus indică faptul că secțiunea de capăt a barei se rotește în sens trigonometric iar capătul consolei se ridică.

Exemplul 13.10.2

Grinda de susținere a unei copertine de intrare într-o clădire este realizată dintr-un profil I, sub forma unei console de lungime 2,5 m încastrate în perete (vezi fig. 13.23). Încărcarea din greutatea proprie, învelitoare și zăpadă, aferente unui profil este de 360daN/m. Dându-se $R=2100\text{daN/cm}^2$, $f_a = \frac{\ell}{400}$; $E=2,1\times10^6\text{daN/cm}^2$. Se cere să se dimensioneze grinda. Pentru secțiunea adoptată se va trasa diagrama σ în secțiunea de solicitare maximă și se vor calcula rotirea și săgeata la capătul consolei.

Rezolvare

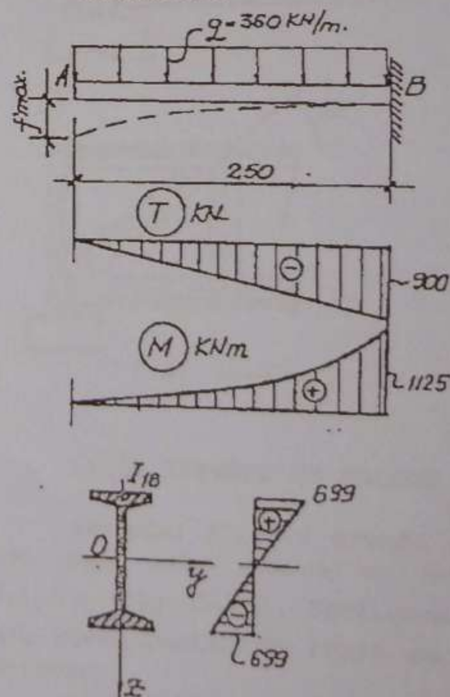


Fig. 13.23

Se trasează diagrama T și M (fig. 13.23,a) din care rezultă $|M_{max}|=1125$ daNm. Folosind relația (12.32) se calculează

$$W_{y,nec} = \frac{112500}{2100} = 53,571\text{cm}^3$$

Din tabelul profilelor I (Anexa 5) se alege I_{12} având caracteristicile geometrice:

$$W_y = 54,70 \text{ cm}^3;$$
$$I_y = 328 \text{ cm}^4.$$

Deoarece prin enunțul problemei este impusă săgeata ce poate fi admisă $f_a = \frac{\ell}{400} = \frac{250}{400} = 0,625$ cm, dimensionarea se va considera terminată numai după verificarea condiției de rigiditate $f_{max} \le f_a$. Folosind relația (12.26), în care $q=350\text{daN/m}=3,5\text{daN/cm}$

se obține $f_{max} = \frac{3,50 \times 250^4}{8 \cdot 2,1 \times 10^6 \times 328} = 2,481cm > f_a$.
Urmare a acestui fapt, dimensionarea consolei se reia și se va face din condiția de rigiditate:

$$f_{max} = \frac{q\ell^4}{8EI_y} = f_a \text{ din care}$$

$$I_{y,nec} = \frac{q\ell^4}{8E \cdot f_a} = \frac{3,5 \times 250^4}{8 \times 2,1 \times 10^6 \times 0,625} = 1302cm^4,$$

Corespunzător acestuia, din tabele, se obține I_{18} având caracteristicile geometrice I_y=1450 cm^4; W_y=161 cm^3. În noua alcătuire, săgeata maximă a grinzii și tensiunile normale din secțiunile ei de încastrare vor avea valorile:

$$f_{max} = f_A = \frac{3,50 \times 250^4}{8 \cdot 2,1 \times 10^6 \times 1450} = 0,561cm < f_a = 0,625cm$$

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \pm \frac{M_{max}}{W_y} = \pm \frac{112500}{161} = \pm 699 daN/cm^2$$

Diagrama este prezentată în figura 13.23,b.

Exemplul 13.10.3

O grindă principală din oțel, preia încărcările P=175 kN date de 2 grinzi secundare fixate pe aceasta (fig. 13.24). Știind că grinda are secțiunea compusă din două tălpi de 200x25 mm și dintr-o inimă de 450x8 mm, solidarizate între ele prin suduri, se cere:

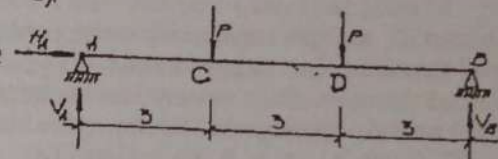
a) trasarea diagramelelor de tensiuni σ și τ în secțiunile de M_{max} și respectiv T_{max} și verificarea de rezistență a grinzii;

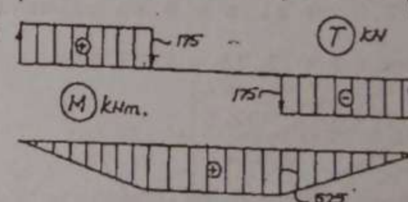
b) săgeata grinzii la mijlocul deschiderii și rotirile ei în reazeme;

c) calculul sudurii discontinue de îmbinare a inimii cu tălpile secțiunii. Se dau: R = 2100

daN/cm^2; R_f^a = 1200daN/cm^2; E = 2,1x10^6 daN/cm^2; R_f=1600 daN/cm^2;

Rezolvare





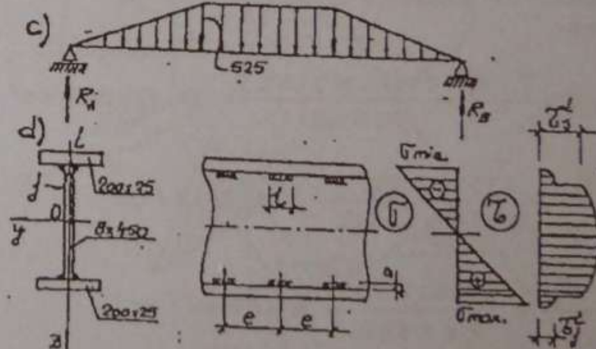


Fig. 13.24

Din motive de simetrie a încărcărilor pe grindă (fig. 13.24,a), reacțiunile din reazeme vor fi egale $V_A = V_B = P$ = 175 kN; H_A = 0.
Trasând diagramele T și M se obțin: M_{max}=525 kNm; T_{max} = 175 kN. Axele principale de inerție ale secțiunii se confundă cu axele de simetrie; cu dimensiunile secțiunii din figură vom avea:

$$I_y = \frac{0,8 \times 45^3}{12} + 2\left(\frac{20 \times 2,5^3}{12} + 20 \times 2,5 \cdot 23,75^2\right) = 62483 cm^4;$$

$$z_{max} = 22,5+2,5 = 25\ cm;\ W_y = \frac{62483}{25} = 2500 cm^3;$$

$$a)\ \sigma_{\frac{max}{min}} = \pm\frac{M_y}{W_y} = \frac{5250000}{2500} = 2100\frac{daN}{cm^2} = R$$

Notând cu i punctul de pe conturul secţiunii, cu j cel situat pe frontierea talpă-inimă şi cu O centrul de greutate al secţiunii, momentele statice ale secţiunilor ce lunecă corespunzătoarea ordonatelor $z = z_{max}$, $z = 22,5$ cm şi $z = 0$ au valorile:

$$S_y^i = 0;\ S_y^j = 20 \times 2,5 \times 23,75 = 1187,5 cm^3$$

$$S_y^o = 1187,5 + 0,8 \times 22,5 \times \frac{22,5}{2} = 1390 cm^3$$

Tensiunile tangenţiale τ_{xz} în punctele i, j şi O se calculează cu formula (13.1).

Vom avea:

$$\tau_i = 0;\ \tau_j^t = \frac{T \cdot S_y^j}{b_t \cdot I_y} = \frac{17500 \times 1187,5}{20 \times 62483} = 16,630 daN/cm^2$$

$$\tau_j^i = \frac{TS_y^i}{b_i I_y} = \frac{17500 \times 1187,5}{0,8 \times 62483} = 416 daN/cm^2$$

$$\tau_o = \frac{T \cdot S_y^o}{b_i I_y} = \frac{17500 \times 1390}{0,8 \times 62483} = 487 daN/cm^2.$$

Diagramele σ şi τ în secţiunile indicate sunt date în figura 13.24,b. Din acestea rezultă $\sigma_{max} = R$ şi $\tau_{max} = 487$ daN/cm² < R_f = 1600daN/cm² - grinda satisface cerinţele de rezistenţă.

b) Se utilizează metoda Mohr. Grinda conjugată încărcată cu forţa fictivă p_f = M pe aceasta este arătată în figura 13.24,c.

Reacţiunile şi eforturile ficitive au valorile:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\left(525 \times 3 + \frac{1}{2} 525 \times 3 \times 2\right) =$$

$$= 525 \times 3 = 1575 kNm^2$$

$$T_{f,A} = R_A = 1575\ kNm^2;\ T_{f,B} = -R_B = -1575\ kNm^2$$

$$M_{f\left(\frac{\ell}{2}\right)} = 4,5R_A - \frac{525 \times 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - 525 \times 1,5 \times 0,75 =$$

$$= 5709,375 kNm^3$$

Conform relaţiilor (12.19) şi (12.20)

$$\varphi_A = \frac{T_{fA}}{EI_y} = \frac{1575 \times 10^6}{2,1 \times 10^6 \times 62483} = 0,012 rad = -\varphi_B$$

$$f_{\left(\frac{\ell}{2}\right)} = \frac{M_{(\ell/2)}}{EI_y} = f_{max} = \frac{5709,375 \times 10^8}{2,1 \times 10^6 \times 62483} = 4,350 cm;$$

c) Se foloseşte ecuaţia 13.20:

$$2a \cdot \ell_c \cdot R_f^s = \frac{T \cdot S_y^j}{I_y} \cdot e.$$

Alegând a = 4 mm; e = 25 cm

$$\ell_c = \frac{17500 \times 1187,5 \times 25}{2 \times 0,4 \times 1200 \cdot 62483} = 8,66 cm;$$

$$\ell = \ell_c + 2a = 8,66+0,8 = 9,46 \cong 10\ cm;$$

CAPITOLUL 14

ÎNCOVOIEREA OBLICĂ

14.1 DEFINIȚII. EFORTURI ÎN SECȚIUNI

Un element de construcție este solicitat la încovoiere oblică atunci când planele de acțiune ale forțelor trec prin centrele de greutate ale secțiunilor transversale, dar nu conțin pe nici una din axele de inerție principale ale acestora. Dacă toate forțele acționează într-un singur plan solicitarea este de *încovoiere oblică plană* (fig. 14.1), iar când forțele acționează în plane diferite, încovoierea oblică este spațială.

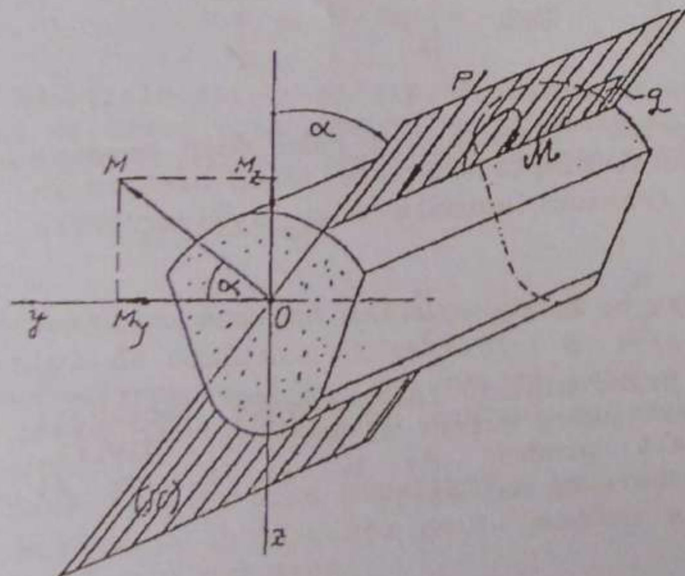


Fig. 14.1

În domeniul construcțiilor, elementele cele mai ilustrative în acest sens sunt panele de acoperiș (fig. 14.2, a și b)

Fixate pe panta acoperișului, acestea sunt încărcate cu forțe gravitaționale provenind din greutatea proprie, greutatea învelitorii și a zăpezii, a prafului etc. al căror plan vertical de acțiune nu conține pe nici una din axele principale de inerție Oy și Oz ale secțiunilor transversale.

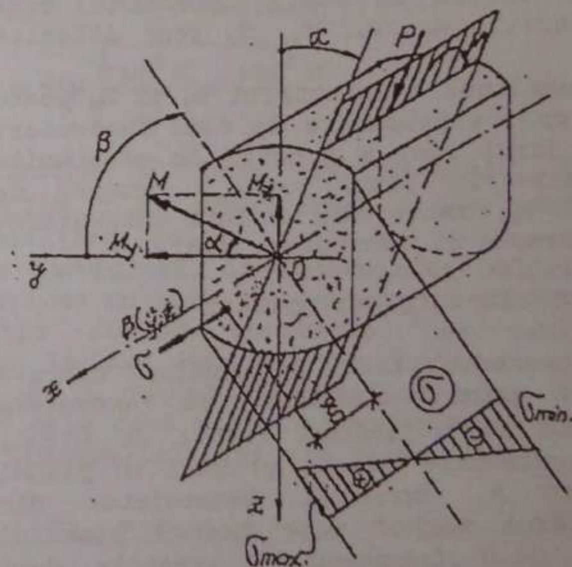


Fig. 14.2

Încovoierea oblică apare și în cazul barelor având secțiunea în T, cu planul de acțiune al forțelor, trecând prin centrul de încovoiere C și formând cu axa de simetrie un unghi α (fig. 14.2,c) a celor din profile L (figura 14.2,d) precum și în cazul profilelor U, când planul forțelor trece prin

centrul de încovoiere c și formează un unghi α cu una din axele de principale de inerție (fig. 14.2,e).

În cel mai general caz de încovoiere oblică, torsorul de reducere al forțelor în punctele axei barei este format dintr-o forță tăietoare T conținută în planul încărcărilor și un moment încovoietor M, al cărui vector este perpendicular pe același plan (fig. 14.1).

Descompunând în secțiune cele două eforturi după axele Oy și Oz, se obțin momentele M_y, M_z și forțele tăietoare T_y și T_z (fig. 14.3 și 14.4,b).

În raport de valorile acestora, putem avea:

- încovoierea oblică pură, atunci când în secțiunile barei $M_y \neq 0$; $M_z \neq 0$; $T_y = T_z = 0$;
- încovoierea oblică cu forță tăietoare, dacă toate eforturile M_y, M_z, T_y, T_z sunt diferite de zero.

Prezența simultană a momentelor M_y și M_z poate fi considerată ca o suprapunere de două încovoieri simple: una în jurul axei y produsă de eforturile M_y și T_z și alta în jurul axei z produsă de eforturile M_z și T_y, motiv pentru care încovoierea oblică se mai numește și *încovoiere dublă*.

14.2 TENSIUNI ÎN SECȚIUNI NORMALE

Pentru cunoașterea stării de tensiune dintr-o secțiune a unei grinzi solicitate la încovoiere oblică, vom nota cu α unghiul format de planul longitudinal de simetrie xOz al grinzii cu planul forțelor și cu M, momentul încovoietor din secțiune, al cărui vector este normal planului forțelor (fig. 14.3). Componentele acestuia după direcțiile y și z au valorile:

$$M_y = M\cos\alpha$$
$$M_z = M\sin\alpha \qquad (14.1)$$

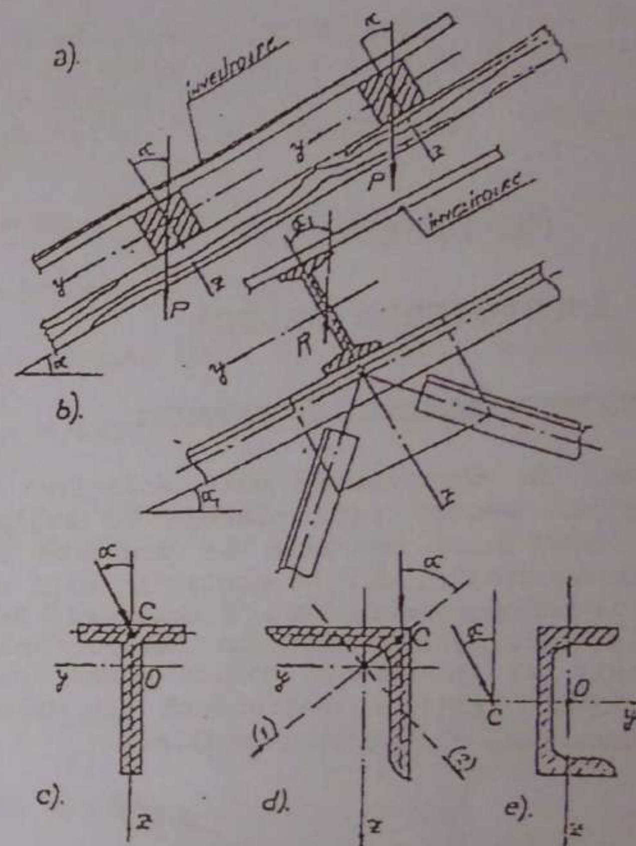


Fig. 14.3

Luate separat, fiecare din cele două momente produc încovoierea simplă a grinzii dând naștere în secțiune unor tensiuni normale σ cu o distribuție de tip Navier:

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z; \quad \sigma_{M_z} = \frac{M_z}{I_z}\cdot y.$$

În baza principiului independenței acțiunii forțelor, într-un punct curent al secțiunii B(y, z), tensiunea totală produsă de M_y și M_z va fi $\sigma_x = \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z}$, care se mai scrie

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y \qquad (14.2)$$

Ţinând seama de relaţiile (14.1), expresia acestor tensiuni devine:

$$\sigma_x = M\left(\frac{z\cos\alpha}{I_y} + \frac{y\sin\alpha}{I_z}\right) \qquad (14.3)$$

Aşa cum se ştie, axa neutră în secţiune reprezintă locul geometric al punctelor acesteia în care $\sigma=0$. Impunând această condiţie în relaţia (14.3) rezultă:

$$z\frac{\cos\alpha}{I_y} + y\frac{\sin\alpha}{I_z} = 0\ , \qquad (14.4)$$

care se mai poate pune şi sub forma

$$z = -y\frac{I_y}{I_z} \cdot tg\alpha = -y tg\beta . \qquad (14.5)$$

Relaţiile (14.4) şi (14.5) descriu ecuaţia unei drepte ce trece prin centrul de greutate al secţiunii având coeficientul unghiular în raport cu axa Oy

$$tg\beta = \frac{I_y}{I_z} \cdot tg\alpha \qquad (14.6)$$

Ea formează cu această axă un unghi β ce se măsoară în sensul de măsurare al unghiului α. Prin urmare, la încovoierea oblică, axa neutră este o dreaptă care trece totdeauna prin centrul de greutate al secţiunii.

Dacă $I_y > I_z$ (caz uzual) $tg\beta > tg\alpha$, astfel că $\beta > \alpha$. Notând cu ξ distanţa de la punctul B(y,z) la axa neutră n-n vom avea:

$$\xi = \frac{\dfrac{z\cos\alpha}{I_y} + \dfrac{z\sin\alpha}{I_z}}{\pm\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{I_y^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{I_z^2}}}$$

sau

$$\frac{z\cos\alpha}{I_y} + \frac{y\sin\alpha}{I_z} = \pm\xi\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{I_y^2} + \frac{\sin^2\alpha}{I_z^2}} .$$

Înlocuind membrul întâi al acestei egalităţi în ecuaţia (14.3), obţinem:

$$\sigma = \pm\xi M\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{I_y^2} + \frac{\sin^2\alpha}{I_z^2}} \qquad (14.7)$$

care indică o lege de variaţie liniară a tensiunilor σ cu deportarea de axa neutră n-n a secţiunii (fig. 14.3).

În consecinţă, la încovoierea oblică punctele din secţiune în care iau naştere tensiunile extreme se obţin ducând conturului secţiunii drepte paralele la axa neutră. Fie $i(y_i, z_i)$, punctul în care M_y si M_z produc întinderi şi $c(y_c, z_c)$ punctul în care cele două momente produc compresiune (fig. 14.3). Conform relaţiei (14.2) vom avea:

$$\sigma_{max} = \sigma_i = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_i + \frac{M_z}{I_z} y_i \qquad (14.8a)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_c = \frac{M_y}{I_y} z_c + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_c \qquad (14.8b)$$

În cazul barelor a căror secţiune este un dreptunghi sau poate fi înscrisă într-un dreptunghi, cele mai depărtate puncte de axa neutră sunt şi cele mai depărtate de axele principale de inerţie, respectiv $y_i = y_c = y_{max}$ şi $z_i = z_c = z_{max}$ (fig. 14.4).

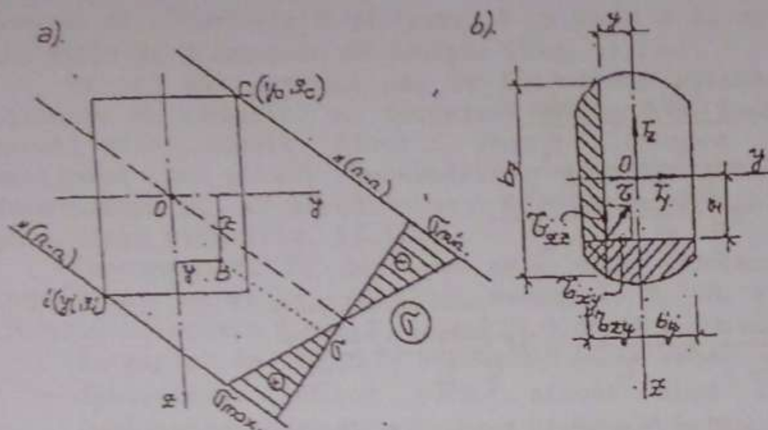


Fig. 14.4

Cu aceste particularizări şi având în vedere că $\frac{I_y}{z_{max}} = W_y$ şi $\frac{I_z}{z_{max}} = W_z$, relaţiile (14.8,a) şi (14.8,b) pot fi comasate într-o singură expresie:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}\right) \qquad (14.9)$$

Înlocuind momentele M_y şi M_z cu valorile date de relaţiile (14.1), expresia tensiunilor extreme ia forma

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm M\left(\frac{\cos\alpha}{W_y} + \frac{\sin\alpha}{W_z}\right) \qquad (14.10)$$

În cazul secţiunilor circulare şi pătrate, orice axă centrală este o axă principală de inerţie, astfel că încovoierea oblică se tratează ca încovoiere simplă, în planul forţelor.

În cazul încovoierii oblice cu forţă tăietoare T, componentele acesteia după axele Oy şi Oz, T_y = $T\sin\alpha$ şi T_z = $T\cos\alpha$ (fig. 14.4,b) dau naştere

tensiunilor τ_{xz} şi τ_{xy} care se calculează cu formula lui Juravski:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b_z I_y}; \quad \tau_{xy} = \frac{T_y S_z}{b_y I_z} \qquad (14.11)$$

în care S_y şi S_z sunt momentele statice ale secţiunilor ce lunecă (cuprinse între z_{max} şi z, respectiv y_{max} şi y), b_z şi b_y sunt lăţimile secţiunilor ce lunecă, iar I_y şi I_z sunt momentele de inerţie ale întregii secţiuni în raport cu aceleaşi axe Oy şi Oz.

Tensiunea totală τ în punctul curent considerat, se obţine însumând geometric tensiunile τ_{xz} şi τ_{xy}

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (14.12)$$

14.3 DEFORMAŢIILE GRINZILOR SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE OBLICĂ

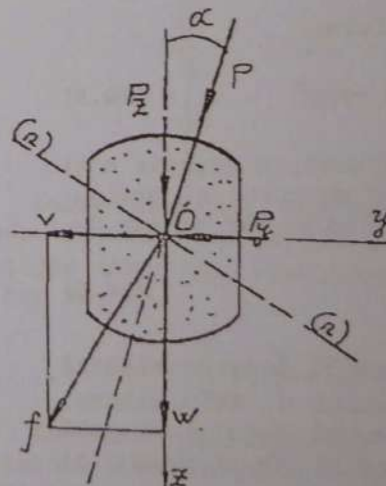


Fig. 14.5

Considerând încărcarea P din planul forţelor rezultantă a forţelor P_z = $P\cos\alpha$ şi P_y = $P\sin\alpha$ acţionând în planele Oxz şi respectiv Oxy, fiecare din acestea va deforma grinda în planul ei de acţiune, producând deplasările v după Oy şi w pe direcţia Oz (fig. 14.5).

Deplasarea totală a unui punct al axei deformate se obține însumând geometric deplasările v și w:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} \qquad (14.13)$$

Valorile acestora (v și w) se calculează cu una din metodele arătate în §12.3. Presupunând că utilizăm în acest scop metoda Mohr, grinzile conjugate se vor încărca cu diagramele de momente M_z, produse de încărcările P_y și M_y produse de P_z. Notând cu M_{fz} și M_{fy} momentele fictive în secțiunea considerată, deplasările din aceeași secțiune vor avea expresia:

$$v = \frac{M_{fz}}{EI_z} \quad (a)$$

$$w = \frac{M_{fy}}{EI_y} \quad (b) \qquad (14.14)$$

Se poate arăta că $M_{fz} = M_f \sin\alpha$ și $M_{fy} = M_f \cos\alpha$, în care M_f reprezintă momentul încovoietor fictiv, pe grinda fictivă din încărcarea acesteia cu diagrama momentelor reale pe grinda reală M, în planul de acțiune al forțelor. Substituind aceste expresii în relațiile (14.14) și (14.13), succesiv se obține:

$$v = M_f \frac{\sin\alpha}{EI_z}; \quad w = M_f \frac{\cos\alpha}{EI_y}$$

$$f = \frac{M_f}{E}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{I_z^2} + \frac{\cos^2\alpha}{I_y^2}} \qquad (14.15)$$

La încovoierea oblică plană, deplasarea totală f este totdeauna perpendiculară pe axa neutră (n-n) a secțiunii.

14.4 CALCULE DE REZISTENȚĂ LA ÎNCOVOIERE OBLICĂ

Uzual, elementele de rezistență solicitate la încovoiere oblică au secțiunile transversale de formă dreptunghiulară (fig. 14.6a) sau care poate fi înscrisă într-un dreptunghi (fig. 14.6,b,c,d și e).

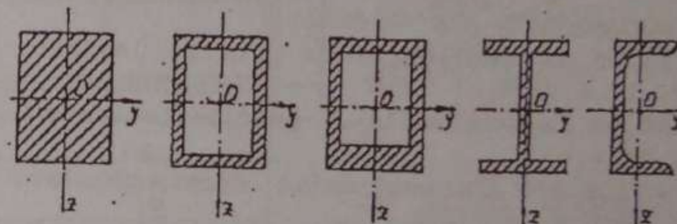


Fig. 14.6

În toate aceste cazuri, conform celor arătate în aliniatul (14.2) tensiunile maxime și minime iau naștere în două colțuri opuse și au mărimea în valoare absolută egală. Având în vedere relația (14.10), condiția de rezistență a barelor prezentând această alcătuire se va exprima prin relația:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm M_{max}\left(\frac{\cos\alpha}{W_y} + \frac{\sin\alpha}{W_z}\right) \le R \qquad (14.16)$$

în care M_{max} reprezintă momentul maxim (în modul), iar $R = \min(R_c, R_t)$ – în cazul materialelor având o comportare diferită la întindere și compresiune și $R = R_t = R_c$ în cazul materialelor cu rezistențe de calcul egale la cele două solicitări.

Verificarea de rezistență a grinzii revine la testarea existenței inegalității (14.16) în secțiunea cea mai solicitată.

Luată la limită, aceeași relație conduce la egalitatea:

$$M_{max}\left(\frac{\cos\alpha}{W_y}+\frac{\sin\alpha}{W_z}\right)=\frac{M_{max}}{W_y}\left(\cos\alpha+\frac{W_y}{W_z}\sin\alpha\right)=R \qquad (14.17)$$

din care se deduce:

a) Formula pentru dimensionare la încovoierea oblică,

$$W_{y,nec}=\frac{M_{max}}{R}\left(\cos\alpha+\frac{W_y}{W_z}\sin\alpha\right), \qquad (14.18)$$

în care raportul W_y/W_z are valorile:

- 6,50...10,20 la secţiunile de profile laminate I(fig. 14.6,d)
- 5,00...10,00 la secţiunile de profile laminate U (fig. 14.6,e)
- h/b = 1,5...2,0 la secţiunile dreptunghiulare (fig. 14.6,a)

Cu $W_{y,nec}$ obţinut se alcătuieşte secţiunea ca formă şi dimensiuni după care se verifică cu relaţia (14.16), în care W_y şi W_z se calculează din considerente geometrice. Dimensionarea se consideră terminată numai atunci când $\sigma_{max} \le R$ iar diferenţa $R-\sigma_{max}$ este suficient de mică pentru ca grinda să lucreze economic.

b) Formula capacităţii portante a secţiunii la încovoiere oblică

$$M_{cap}=\frac{R}{\dfrac{\cos\alpha}{W_y}+\dfrac{\sin\alpha}{W_z}} \qquad (14.19)$$

Dacă bara prezintă o secţiune, alta decât dreptunghiulară sau care să nu poată fi înscrisă într-un dreptunghi, condiţia ei de rezistenţă în baza relaţiilor (14.8) se va exprima prin două inegalităţi:

$$\sigma_{max}=M_{max}\left(\frac{\cos\alpha}{W_{yi}}+\frac{\sin\alpha}{W_{zi}}\right)\le R_i \qquad (14.20)$$

$$\sigma_{min}=M_{max}\left(\frac{\cos\alpha}{W_{yc}}+\frac{\sin\alpha}{W_{zc}}\right)\le R_c$$

în care W_{yi}, W_{zi}, W_{yc}, W_{zc} reprezintă modulii de rezistenţă corespunzători punctelor i şi c din secţiune în care momentele M_y şi M_z produc tensiuni de întindere şi respectiv de compresiune. În cazul barelor prezentând astfel de secţiuni, calculul de rezistenţă este mai complex.

Verificarea unei grinzi revine la testarea existenţei relaţiilor (14.20) care trebuie să fie satisfăcute concomitent.

Dimensionarea unei secţiuni pe baza relaţiilor (14.20) luate la limită este dificilă datorită numărului mare de necunoscute (W_{yi}, W_{yc}, W_{zi}, W_{zc}). Urmare a acestui fapt, alcătuirea secţiunilor se face prin *încercări succesive*.

În acest scop se alege secţiunea ca formă şi dimensiuni, după care se verifică cu relaţiile (14.20). Ajustarea dimensiunilor alese se face succesiv până la satisfacerea condiţiilor de rezistenţă (14.20) şi obţinerea unor diferenţe $R_i-\sigma_{max}$, $R_c-\sigma_{min}$, după caz, suficient de mici pentru asigurarea criteriului economic.

Capacitatea portantă a barei corespunde valorii momentului încovoietor care produce în fibrele cele mai solicitate ale secţiunii, tensiunile $\sigma_{max}=\sigma_i$ sau $\sigma_{min}=R_c$.

Deoarece nu putem cunoaşte ordinea apariţiei acestora, cu relaţiile (14.20) luate la limită se calculează două momente corespunzătoare celor două situaţii:

$$M_{i,cap} = \frac{R_i}{\frac{\cos\alpha}{W_{yi}} + \frac{\sin\alpha}{W_{zi}}} \qquad (14.21,a)$$

$$M_{c,cap} = \frac{R_c}{\frac{\cos\alpha}{W_{yc}} + \frac{\sin\alpha}{W_{zc}}} \qquad (14.21,b)$$

Momentul capabil al secțiunii M_{cap} corespunde celei mai mici valori a eforturilor $M_{i,cap}$ și $M_{c,cap}$.

Dacă materialul din componența barei se bucură de proprietatea $R_i = R_c = R$, în relațiile (14.21,a) și (14.21,b) se va introduce această valoare.

14.5 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 15.5.1

Pana unui acoperiș din lemn (fig. 14.7) de secțiune dreptunghiulară reazemă pe două forme situate la 4 m una de cealaltă. Panta acoperișului este de 30°. Cunoscând încărcarea totală pe învelitoare q_0 = 250 daN/m² (greutatea proprie + zăpada), distanța dintre pane d = 1,20 m și caracteristicile mecanice ale materialului lemnos: R = 100 daN/cm², E = 0,1x10⁵ daN/cm², se cere:

- dimensionarea panei ca bară de secțiune dreptunghiulară având $\frac{h}{b} = 1,5$;
- distribuția tensiunilor normale σ în secțiunea de moment maxim;
- săgeata panei la mijlocul deschiderii.

Rezolvare

Ca structură statică (fig. 14.7,a și b) pana este o grindă simplu rezemată al cărei moment maxim ia naștere la mijlocul deschiderii. Intensitatea încărcării liniare ce revine unei pane va fi: $q = d\cdot q_0$ = 250daN/m² x1,20m = 300 daN/m.

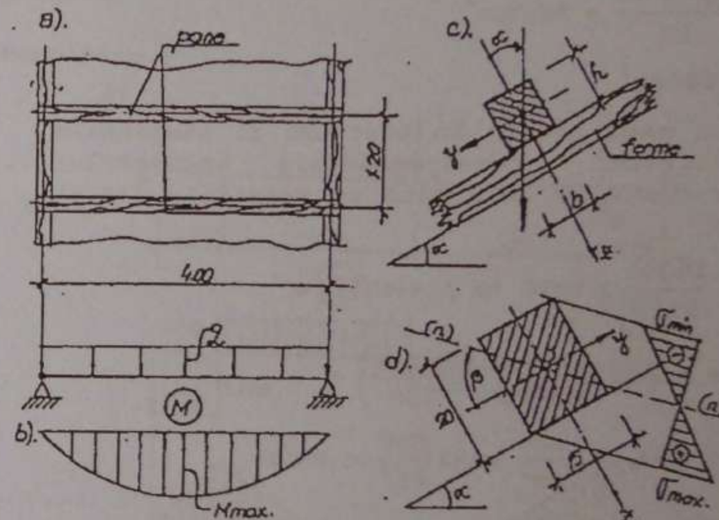


Fig. 14.7

$$M_{max} = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{300 \times 4^2}{8} = 600\text{daNm}.$$

Folosind relația (14.18) se calculează

$$W_{y,nec} = \frac{60000}{100}\left(\cos 30 + \frac{h}{b}\sin 30\right) = 970\text{cm}^3.$$

Egalând modulul de rezistență geometric $W_y = \frac{bh^2}{6}$ cu $W_{y,nec}$ și asociind ecuației obținute relația $\frac{h}{b} = 1,5$ se obține sistemul de ecuații: $\begin{cases}\frac{bh^2}{6} = 970\text{cm}^3\\ h = 1,5b\end{cases}$

care are soluția b=13,727, h = 20,59 cm.

Adoptând: b = 15 cm; h = 20 cm, caracteristicile geometrice efective ale secțiunii vor fi (fig. 14.7,d):

$$I_y = \frac{15 \times 20^3}{12} = 10000 cm^4$$

$$I_z = \frac{15^3 \times 20}{12} = 5625 cm^4$$

$$W_y = 1000 cm^3$$

Poziția axei neutre în secțiune și tensiunile normale extreme corespunzătoare momentului încovoietor maxim se determină cu relațiile (14.6) și (14.10):

$$tg\beta = \frac{10000}{5625} \times tg30 \Rightarrow \beta = 45^0 44' 47''$$

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \pm 60000\left(\frac{\cos\alpha}{1000} + \frac{\sin\alpha}{750}\right) =$$

$$= \pm 91,962 \frac{daN}{cm^2} = 92 \frac{daN}{cm^2} < R$$

Axa neutră și diagrama tensiunilor σ în secțiunea de încastrare sunt arătate în figura 14.7,d.

Descompunând forța q după axele secțiunii Oy și Oz se obțin:

$$q_y = q\sin 30^\circ = 300 \times \sin 30^\circ = 150 \text{ daN/m} = 1,50 \text{ daN/cm}$$

$$q_z = q\cos 30^\circ = 300 \times \cos 30^\circ \cong 260 \text{ daN/m} = 2,60 \text{ daN/cm}$$

Săgețile produse de q_y și q_z pe grindă (considerând aceleași rezemări pe direcțiile y și z) se calculează direct cu relația (12.22). Vom avea:

$$v = \frac{5 \cdot q_y \cdot \ell^4}{384 E I_z} = \frac{5 \cdot 1,50 \cdot 400^4}{384 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot 5625} = 0,889 \text{ cm}$$

$$w = \frac{5 \cdot q_z \cdot \ell^4}{384 E I_y} = \frac{5 \cdot 2,60 \cdot 400^4}{384 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot 10000} = 0,867 \text{ cm}$$

Aplicând relația (14.13) se obține săgeata maximă

$$f_{max} = \sqrt{0,889^2 + 0,867^2} = 1,242 \text{ cm}$$

Exemplul 14.5.2

Consola din figura 14.8,a având secțiunea transversală de tip cheson (fig. 14.8,b) este încărcată la capătul liber cu forța P ce face un unghi α = 15° cu axa Oz.

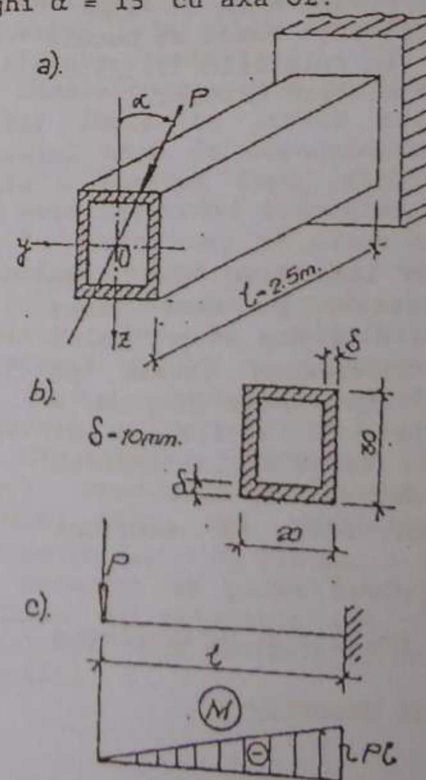


Fig. 14.8

Cunoscând R = 2100 daN/cm², E = 2,1x10⁶ daN/cm² se cere:

a) încărcarea capabilă P_{cap};

b) săgeata totală la capătul liber al consolei.

Rezolvare

a) În planul de acțiune al forței $|M_{max}| = P \cdot \ell = 2,50P$.

Momentul capabil al secțiunii la încovoierea oblică plană este dat de relația (14.19) în care:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}};$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

$$I_y = \frac{20 \times 30^3}{12} - \frac{18 \times 28^3}{12} = 12072\ cm^4;$$

$$I_z = \frac{20^3 \times 30}{12} - \frac{18^3 \times 28}{12} = 6392\ cm^4;$$

$z_{max} = 15$ cm; $W_y = 8048$ cm³

$y_{max} = 10$ cm; $W_z = 639,20$ cm³.

$$M_{cap} = \frac{2100}{\dfrac{\cos 15^\circ}{8048} + \dfrac{\sin 15^\circ}{639,2}} = 4000522 daNcm = 400\, kNm$$

Punând condiția $|M_{max}| = M_{cap}$ se obține ecuația $2.5\, P_{cap} = M_{cap} = 400$ kNm din care rezultă $P_{cap} = 160$ kN.

b) Descompunând forța P_{cap} după axele Oy și Oz se obțin componentele $P_z = 160 x\cos 15^\circ = 154,548$ kN, $P_y = 160\sin 15^\circ = 41,411$ kN;

Componenta P_y produce o deplasare v_A în direcția axei y iar componenta P_z o deplasare w_A pe direcția axei z. Pentru calculul acestora se utilizează relația (12.26')

$$v_A = \frac{P_y \cdot l^3}{3EI_z} = \frac{4141,1 \times 250^3}{3 \times 2,1 \times 10^6 \times 6392} = 4,607 cm$$

$$w_A = \frac{P_z \cdot l^3}{3EI_y} = \frac{15454,8 \times 250^3}{3 \times 2,1 \times 10^6 \times 6392} = 4,763 cm$$

$$f_A = f_{max} = \sqrt{1,607^2 + 4,763^2} = 5,026 cm$$

Exemplul 14.5.3

O grindă simplu rezemată este încărcată cu un sistem de forțe P, acționând ca în figura (14.9,a) într-un plan ce face un unghi $\alpha=10^\circ$ cu planul vertical de simetrie Oxz al grinzii (fig. 14.9,b).

Cunoscând secțiunea grinzii și P = 125 kN; R = 2100 daN/cm², E = 2,1x10⁶ daN/cm², f_a = 0,75 cm. Se cere verificarea de rezistență și rigiditate a grinzii.

Rezolvare

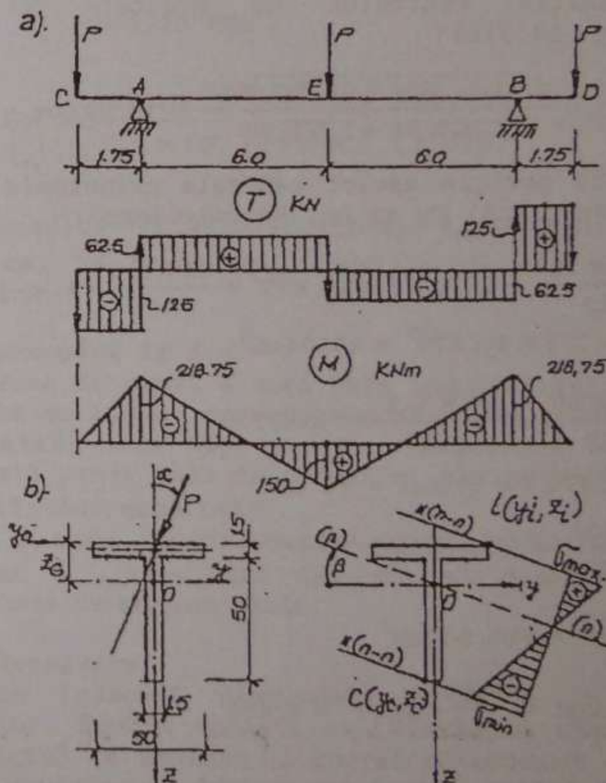


Fig. 14.9

Se trasează diagramele T și M în planul de acțiune al forțelor pe baza regulilor stabilite în capitolul 7. Având diagrama M se observă că secțiunile periculoase sunt cele de reazem în care momentul are valoarea maximă. Pentru verificare se folosește relația (14.16) în care:

$M_{y,max} = -218,75 \cdot \cos 10° = -215,427$ kNm

$M_{z,max} = 218,75 \cdot \sin 10° = -37,986$ kNm

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}; \quad W_z = \frac{I_z}{y_{max}}.$$

Pentru determinarea poziţiei axelor centrale Oy şi Oz se alege o axă arbitrară y_0 şi se determină poziţia centrului de greutate al secţiunii (fig. 14.7,b):

$$z_G = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i} = \frac{0,75 \times 1,5 \times 50 + 26,5 \times 1,5 \times 50}{1,5 \times 50 + 1,5 \times 50} = 13,625 \text{cm.}$$

Având stabilită poziţia axelor centrale principale de inerţie a secţiunii Oy şi Oz, se calculează:

$$I_y = \frac{1,5 \times 50^3}{12} + 50 \times 1,5 \times 12,875^2 + \frac{50 \times 1,5^3}{2} +$$
$$+ 50 \times 1,5 \times 12,875^2 = 40504 \text{cm}^4$$

$$I_z = \frac{1,5 \times 50^3}{12} + \frac{50 \times 1,5^3}{12} = 15639 \text{cm}^4$$

$z_{max} = 37,875$ cm ; $y_{max} = 25$ cm;

$$W_y = \frac{40504}{37,875} = 1069,415 \text{cm}^3$$

$$W_z = \frac{15639}{25} = 625,560 \text{cm}^3$$

$$tg\beta = \frac{I_y}{I_z} tg\alpha = \frac{40504}{15639} tg 10° = 0,456,$$

$\beta = 24°32'$. Se trasează apoi axa neutră în secţiune (n-n) şi se duc paralele acesteia la contur identificându-se punctele de solicitări extreme *i*

şi c (fig. 14.9,c). $y_i = 25$ cm; $z_i = -13,625$ cm; $y_c = -0,75$; $z_c = 38,875$ cm.

Folosind relaţiile (14.8,a) şi (14.8,b)

$$\sigma_i = \frac{(-2154270)}{40504} \cdot (-13,625) + \frac{(+379860)}{15639} \cdot (+25) =$$
$$= 724,667 + 607,233 = 1331,9 \cong 1332 \text{daN/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{(-2154270)}{40504} \cdot 38,875 + \frac{(379860)}{15639} \cdot (-0,75) =$$

$$= -2067,629 - 15,821 = -2083,45 \text{daN/cm}^2.$$

Deoarece $R_i = R_t = R$, verificarea secţiunii se va face cu relaţia (14.16).

Cum $|\sigma|_{max} = 2083$ daN/cm² $< R = 2100$ daN/cm² rezultă că bara satisface condiţia de rezistenţă. Diagrama σ în secţiune este arătată în figura 14.9,c.

Pentru calculul săgeţilor grinzii vom utiliza formula (14.15) determinând momentele fictive M_f în planul forţelor. În cazul acestei probleme este avantajos a se descompune momentele reale M în două diagrame mai simple, trasate separat pentru forţele de pe console şi forţa de la mijlocul deschiderii (fig. 14.10,a).

Grinda fictivă, conform precizărilor din paragraful 12.4 este o grindă Gerber (fig. 14.10,b). Pentru rezolvare, aceasta se desparte în 3 grinzi, fiecare preluând încărcarea fictivă aferentă deschiderii ei (fig. 14.10,c şi d).

Reacţiunile fictive pe grinda din figura 14.10,c vor fi:

$$R_A = R_B = -\frac{1}{2} \cdot 375 \times \frac{12}{2} + 218,875 \times \frac{12}{2} = 188,25 \text{ KNm}^2.$$

Cu acestea, momentele M_f pe reazeme vor fi:

$M_{C,e}=M_{C,d}=1,75R_A+\frac{1}{2}1,75\times 218,875\times\frac{2}{3}1,75=552,872$ KNm³

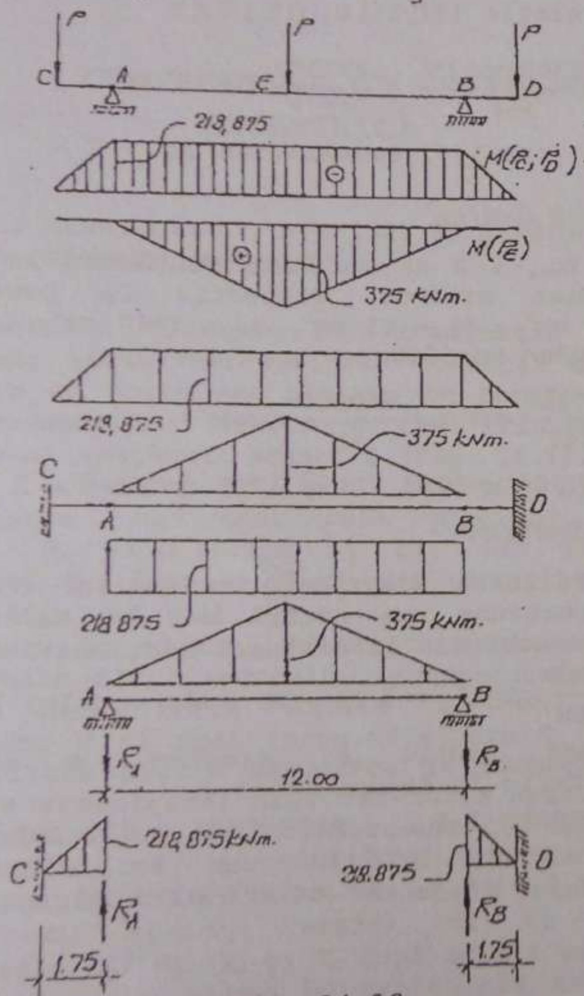


Fig. 14.10

Înlocuind în relația (15.14) se obține:

$$f_C=\frac{552,872\times 10^{6}}{2,1\times 10^{6}}\sqrt{\left(\frac{\cos 10}{40504}\right)^2+\left(\frac{\sin 10}{15639}\right)^2}=0,704\ \text{cm}=f_D$$

La mijlocul deschiderii vom avea

$$M_{f\left(\frac{l}{2}\right)}=218,875\times 6\times 3-6\times R_A-\frac{375\times 6}{2}\cdot\frac{1}{3}6=$$

$$=560,25\ \text{kNm}^3;$$

$$f_{\left(\frac{l}{2}\right)}=\frac{560,25\times 10^{8}}{2,1\times 10^{6}}\sqrt{\left(\frac{\cos 10}{40504}\right)^2+\left(\frac{\sin 10}{15639}\right)^2}=0,713\text{cm}$$

Rezultă $f_{max}=f_{(l/2)}=0,713$cm; $f_{max}=0,713$cm< $f_a=$ 0,75 cm, în concluzie, condiția de rigiditate se verifică.

Exemplul 14.5.4

Pana de capăt a unei hale industriale, având o consolă de 1,5 m, rezemă pe două ferme situate la 6 m interax(vezi fig. 14.11). Încărcarea verticală aferentă panei este de 600daN/m, iar unghiul pantei acoperișului este $\alpha=15°$.

Se cere dimensionarea panei dintr-un profil laminat I, (R = 2120 daN/cm²) și diagrama σ în secțiunea de moment maxim.

Rezolvare

Se trasează diagramele T și M în planul forțelor. Pentru aceasta se calculează reacțiunile și punctul de anulare al forței tăietoare:

$$\sum M_B=0;6V_A-7,5\times 600\times 2,25=0$$

$$\sum M_A=0;6V_B-7,5\times 600\times 3,75=0.$$

Se obțin:

V_A = 1687,50 daN; V_B = 2812,50 daN;

$T_\xi = V_A - 600\xi = 0 \rightarrow \xi = 2,8125$ m;

$M_\xi = M_{max} = 2,8125 \times 1687,5 - 600 \times 2,8125 \times 1,40625$
$= 2373$ daNm;

$M_B = -600 \times 1,5 \times 0,75 = -675$daNm; $|M_{max}| = 2373$daNm;

Diagramele T și M pe bară sunt reprezentate în figura 14.11,a.

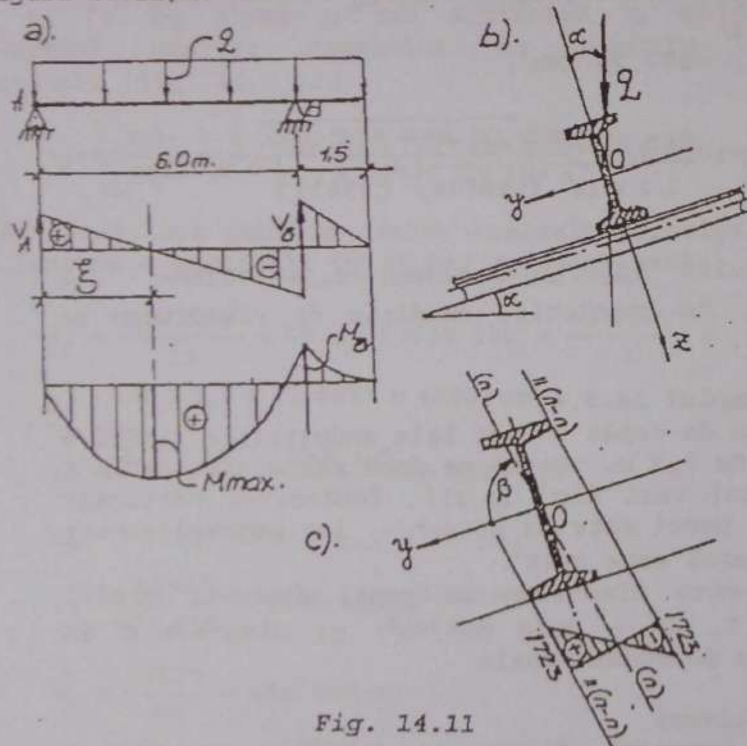


Fig. 14.11

Alegând $\frac{W_y}{W_z} = 8,00$, cu relația (14.18) se calculează

$$W_{y,nec} = \frac{237300}{2100}\left(\cos 15^\circ + 8 \cdot \sin 15^\circ\right) = 343\text{cm}^3.$$

Din Anexa 5 se alege profilul care are $W_y \geq W_{y,nec}$. În cazul nostru rezultă un I_{24} având $W_y = 354$ cm^3; $W_z = 41,7$ cm^3. Cu aceste elemente se verifică secțiunea cu relația (14.16).

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{237300 \cos 15^\circ}{354} + \frac{237300}{41,7}\sin 15^\circ =$$
$$= 647,498 + 1472,848 = 2120\text{daN/cm}^2 > R =$$
$$= 2100 \text{ daN/cm}^2.$$

Deoarece $\sigma_{max} > R$ se modifică secțiunea luând profilul imediat următor, respectiv I_{26} pentru care: $W_y = 442$ cm^3 ; $W_z = 51$ cm^3, $I_y = 5740$ cm^4; $I_z = 288$ cm^4. Efectuând verificarea noii secțiuni:

$$\sigma_{max} = \frac{237300}{442}\cos\alpha + \frac{237300}{51}\sin\alpha =$$
$$= 518,584 + 1204,270 = 1723 \text{ daN/cm}^2 < R =$$
$$= 2100\text{daN/cm}^2$$

Pentru obținerea diagramei tensiunilor σ se trasează în secțiune axa neutră n-n și se duc drepte paralele acesteia la conturul secțiunii. Vom avea: $\text{tg}\beta = \frac{5740}{288} \cdot \text{tg}15^\circ = 5,34$, de unde rezultă $\beta = 79^\circ 250'36''$. Axa neutră și diagrama σ sunt reprezentate grafic în figura 14.11,c.

Deși diferența $R - \sigma_{max} = 2100 - 1723 = 377$ daN/cm^2 este relativ mare, profilul I_{26} se acceptă, întrucât între I_{24} și I_{26} nu există altă mărime de profil laminat.

CAPITOLUL 15

COMPRESIUNE ŞI ÎNTINDERE EXCENTRICĂ

15.1 GENERALITĂŢI, EFORTURI ŞI TENSIUNI ÎN SECŢIUNI NORMALE

Numeroase elemente de construcţie (stâlpi, diafragme, ziduri de sprijin, fundaţii etc) sunt încărcate cu forţe sau sisteme de forţe, paralele cu axa elementului dar care nu trec prin centrul de greutate al secţiunii acestora (fig. 15.1).

La acestea se pot adăuga şi forţe transversale, cum sunt cele date de acţiunea vântului P_v (fig.15.1,a şi b), din împingerea pământului P_r (fig. 15,1,c) sau din alte diverse acţiuni (fig. 15.1,d).

Reduse în centrul de greutate al secţiunilor transversale ale elementului, aceste încărcări dau naştere unei forţe axiale N, unui moment încovoietor M şi unei forţe tăietoare T. O astfel de solicitare poartă denumirea de *compresiune sau întindere excentrică*, după cum forţa axială N este de compresiune sau de întindere. În cel mai general caz de solicitare, vectorii M şi T în secţiune nu sunt dirijaţi după nici una din axele principale de inerţie, O_y şi O_z, astfel că ei prezintă componentele M_y, M_z, T_y şi T_z după aceste axe.

Aşa cum s-a văzut în capitolele anterioare, eforturile N, M_y şi M_z produc în secţiuni tensiuni normale σ, iar T_y şi T_z tensiuni tangenţiale τ. Întrucât în marea majoritate a cazurilor rezistenţa barei în secţiuni este determinată de tensiunile normale σ, efectul forţelor tăietoare T_y şi T_z în

calculul uzual al acestor elemente de construcţie se neglijează.

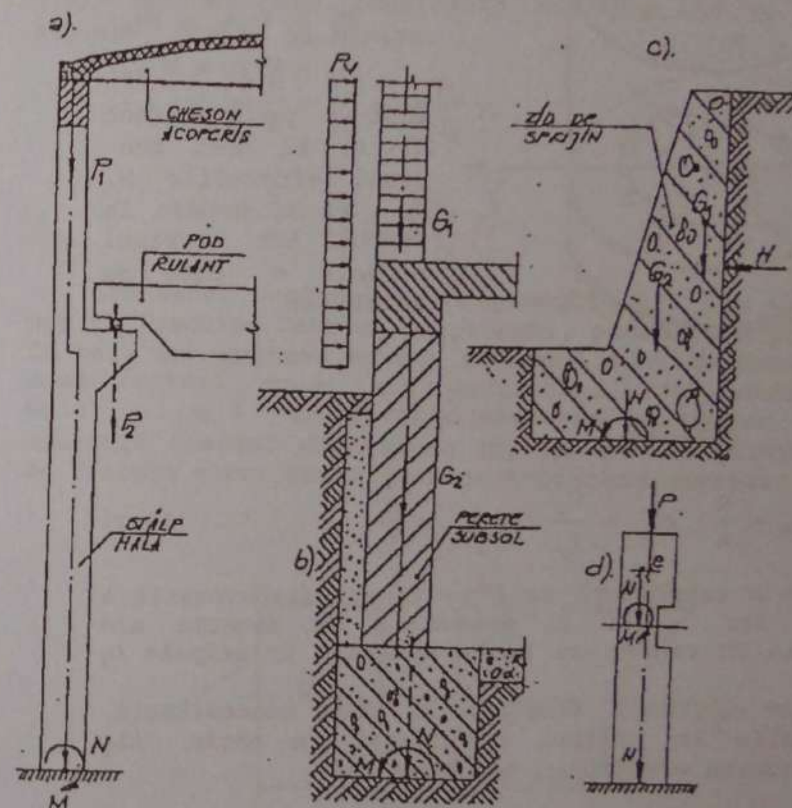


Fig. 15.1

Solicitarea echivalentă de compresiune sau întinderea excentrică poate fi ilustrată printr-o bară încărcată cu o forţă P, paralelă cu axa barei, aplicată excentric în punctul $C(y_0, z_0)$ numit *pol al forţei* (fig. 15.2).

Pentru exprimarea stării de solicitare, bara se raportează la un sistem de referinţă cartezian, având axa x dirijată după axa barei şi axele Oy şi Oz, axe ale secţiunii transversale (fig. 15.2).

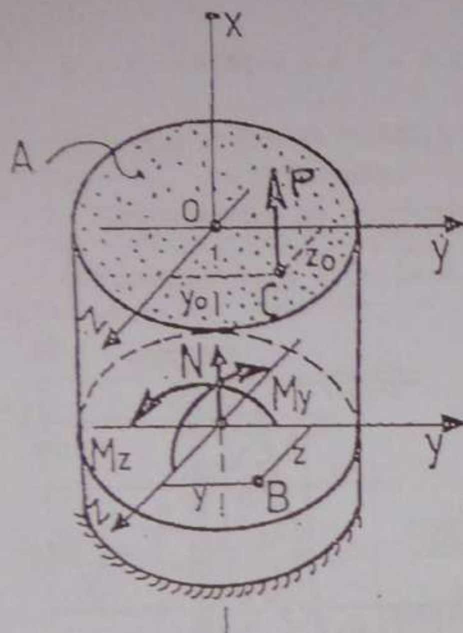


Fig. 15.2

Forța F aplicată în polul C produce în secțiunile barei eforturile relațiile (15.1):

$$N = P;$$

$$M_y = P \cdot z_o = Nz_o;$$

$$M_z = P \cdot y_o = N \cdot y_o.$$

Într-un punct curent B(y,z) al unei secțiuni eforturile N, M_y și M_z produc la rândul lor tensiuni normale σ, date de relațiile:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}; \quad \sigma_{M_y} = \frac{M_y}{I_y} z; \quad \sigma_{M_z} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \tag{15.2}$$

în care A reprezintă aria secțiunii transversale a barei, iar I_y și I_z momentele de inerție ale acesteia în raport cu axele centrale principale O_y și O_z.

Cum acțiunea eforturilor este concomitentă, tensiunile în punctul considerat se obțin ... in suprapunerea efectelor, vom avea deci,

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \tag{15.3}$$

Exprimând momentele de inerție în funcție de aria secțiunii A și de razele ei de girație i_y și

i_z, în baza relației (8.18): $I_y = i_y^2 A$; $I_z = i_z^2 A$, expresia tensiunii normale totale σ devine:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot z_o}{i_y^2 A} z + \frac{N y_o}{i_z^2 A} y,$$

și poate fi pusă sub forma

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{z_o}{i_y^2} z + \frac{y_o}{i_z^2} y\right) \tag{15.4}$$

Din structura acestei relații rezultă că tensiunile normale la încovoierea cu forță axială variază liniar pe secțiunea transversală a barei și se anulează pentru valoarea zero a sumei termenilor din paranteză, prin urmare ecuația axei neutre (σ=0) va avea expresia:

$$1 + \frac{z_o}{i_y^2} z + \frac{y_o}{i_z^2} y = 0 \tag{15.5}$$

care reprezintă o dreaptă ce nu trece prin centrul de greutate al secțiunii.

Tăieturile acesteia pe axele O_y și O_z notate cu a_y și a_z se obțin făcând succesiv în ecuația (15.5) z=0 și y = 0, prin urmare:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_o}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_o} \tag{15.6}$$

Semnul acestora este contrar coordonatelor y_o, z_o punând în evidență că axa neutră a secțiunii trece întotdeauna prin cadranul opus celui în care este aplicată forța P. Cu cât polul C(y_o, z_o), este mai apropiat de originea axelor de coordonate cu atât tăieturile a_y și a_z sunt mai mari, astfel că axa neutră este mai depărtată de secțiune. La limită, când $y_o = z_o = 0$, axa neutră este aruncată la ∞, solicitarea barei devenind de compresiune

centrică. Dacă însă punctul C se depărtează de originea axelor, y_0 şi z_0 cresc astfel că tăieturile a_y şi a_z scad, axa neutră apropiindu-se de centrul de greutate al secţiunii. La limită, când $y_0 = z_0 = \infty$, tăieturile $a_y = a_z = 0$ şi deci axa neutră trece prin centrul de greutate al secţiunii şi cum $M_y = z_0 \cdot N$; $M_z = y_0 \cdot N$ acest caz este posibil numai pentru $N = 0$; $M_y \neq 0$; $M_z \neq 0$, deci pentru cazul încovoierii oblice pure. În raport cu secţiunea barei, axa neutră poate avea una din următoarele poziţii:

- să taie secţiunea (fig.15.3.a);
- tangentă la secţiune (fig. 15.3,b);
- să nu taie secţiunea (fig. 15.3,c).

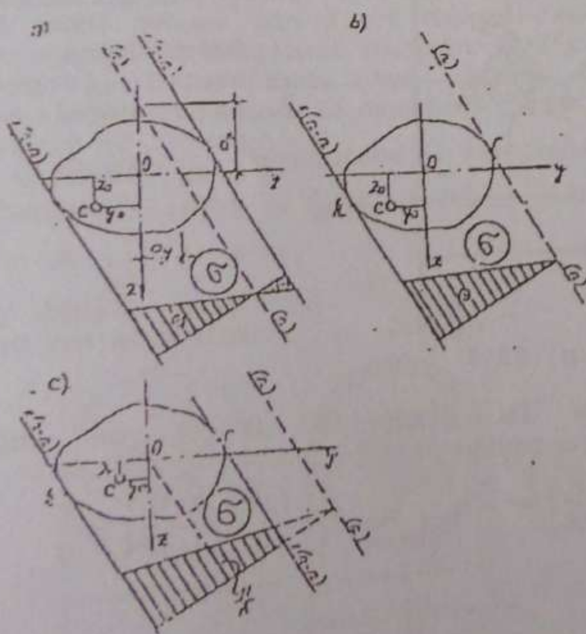


Fig. 15.3

Ducând tangente conturului secţiunii paralele cu axa neutră n-n se obţin două puncte $k(y_k, z_k)$ şi $r(y_r, z_r)$ în care tensiunile normale iau valori extreme, maxime şi minime:

$$\sigma_k = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_k + \frac{M_z}{I_z} y_k$$

$$\sigma_r = \frac{N}{A} + \frac{M_r}{I_y} z_r + \frac{M_z}{I_z} y_r \qquad (15.7)$$

În cazul secţiunilor dreptunghiulare sau care pot fi înscrise într-un dreptunghi, punctele k şi r în care iau naştere aceste tensiuni sunt totdeauna două colţuri opuse ale secţiunii, prin urmare $y_k = -y_r$, $z_k = -z_r$. Poziţia acestora se obţine cu uşurinţă trasând diagramele σ_N, σ_{My} şi σ_{Mz} produse de fiecare efort considerat ca acţionând separat.

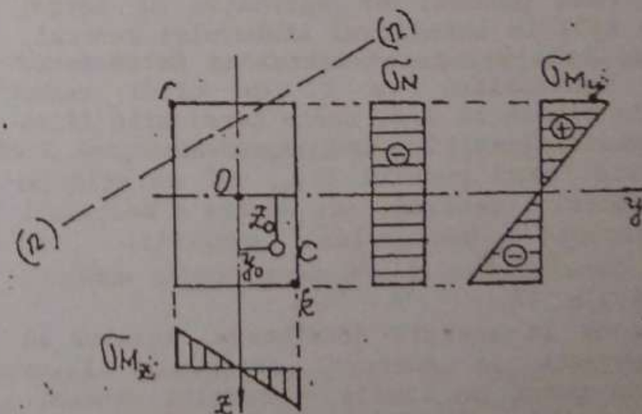


Fig. 15.4

Pentru secţiunea prezentată în figura (15.4) supusă la compresiune excentrică de forţa P aplicată în cadranul 1, coordonatele celor două puncte vor fi

$k\left(\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$ şi $r\left(-\frac{b}{2};-\frac{h}{2}\right)$. Cu particularizările arătate, relaţiile (15.7) se pot exprima condensat printr-o singură ecuaţie având forma:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{N}{A} \pm \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}\right) \qquad (15.8)$$

în care $W_y = \frac{z_k}{I_y} = \frac{bh^2}{6}$, $W_z = \frac{y_k}{I_z} = \frac{b^2h}{6}$ reprezintă modulii de rezistenţă ai secţiunii dreptunghiulare corespunzători axelor Oy şi Oz.

15.2 SÂMBURE CENTRAL

Locul geometric al punctelor secţiunii, grupate în jurul centrului ei de greutate, în care aplicând o forţă normală excentrică, se obţin tensiuni de acelaşi semn pe întreaga secţiune, poartă denumirea de *sâmbure central*.

Atunci când punctul de aplicaţie al forţei $C(y_o, z_o)$ se află în interiorul sâmburelui central, axa neutră nu taie secţiunea astfel că în aceasta, distribuţia tensiunilor va fi de tipul celei prezentate în figura 15.3,c, toate tensiunile fiind de aceeaşi natură (pozitive sau negative).

La limită, când punctul $C(y_o, z_o)$ se află pe conturul sâmburelui central, axa neutră a secţiunii devine tangentă conturului acesteia, iar distribuţia tensiunilor σ are forma celei arătate în figura 15.3,b.

Pornind de la această constatare, rezultă că fiecărei tangente la conturul secţiunii îi va corespunde un punct pe limita sâmburelui central. Ducând mai multe drepte tangente conturului secţiunii se vor obţine o serie de puncte, toate aparţinând conturului sâmburelui central. Unind

aceste puncte cu linii drepte sau curbe, după cum conturul secţiunii este drept sau curb, se obţine un domeniu închis ce reprezintă sâmburele central al secţiunii respective.

Coordonatele acestor puncte, corespunzătoare tangentelor la conturul secţiunii, se obţin din relaţia (15.6):

$$y_o = -\frac{i_z^2}{a_y} \; ; \; z_o = -\frac{i_y^2}{a_z} \qquad (15.9)$$

Pentru exemplificare, vom determina în continuare sâmburele central la câteva secţiuni uzuale.

a) *Secţiunea dreptunghiulară* (fig. 15.5)

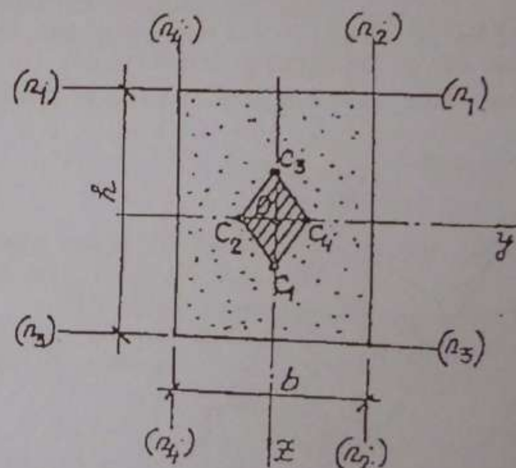


Fig. 15.5

$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}$

$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$

Considerând axa neutră tangentă la conturul secţiunii în poziţia n_1-n_1, aceasta va avea tăieturile $a_z = -\frac{h}{2}$; $a_y = \infty$ (n_1-n_1 fiind paralelă cu axa Oy).

Înlocuind în relaţiile (15.9) se obţin coordonatele punctului C_1:

$$y_{o1} = -\left(\frac{b^2}{12}\right)\Big/\infty = 0 \; ; \; z_{o1} = -\left(\frac{h^2}{12}\right)\Big/\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{6}$$

Considerând în continuare axa neutră tangentă la contur în poziția $n_2 - n_2$, aceasta va avea tăieturile $a_z = \infty$; $a_y = \frac{b}{2}$ și va determina punctul C_2 de coordonate:

$$y_{o2} = -\left(\frac{b^2}{12}\right)\bigg/\frac{b}{2} = -\frac{b}{6}; \quad z_{o2} = -\left(\frac{h^2}{2}\right)\bigg/\infty = 0$$

Seria de drepte tangente la contur se continuă cu pozițiile n_3-n_3 și n_4-n_4 pentru care se obțin punctele $C_3\left(0; -\frac{h}{6}\right)$ și $C_4\left(\frac{b}{6}; 0\right)$. Unind punctele C_1, C_2, C_3 și C_4 cu linii drepte (pentru că și conturul secțiunii este compus din linii drepte) se obține sâmburele central al secțiunii (hașurat în fig. 15.5), reprezentat printr-un romb. Vom reține deci că limitele sâmburelui central la dreptunghi sunt situate la $\frac{h}{6}$ și $\frac{b}{6}$ de centrul de greutate al secțiunii..

b. Secțiunea circulară și inelară (fig. 15.6)

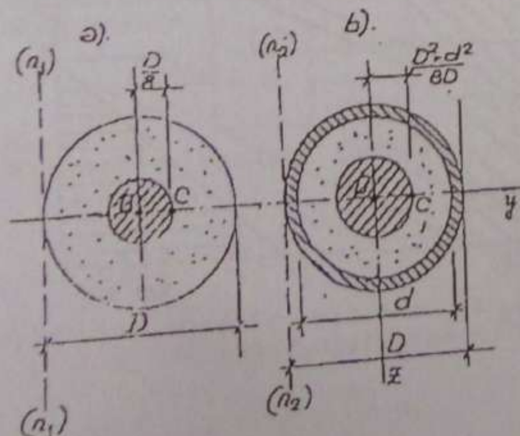


Fig. 15.6

Deoarece ambele secțiuni prezintă simetrie polară, sâmburele central al lor va fi reprezentat de un cerc. Pentru determinarea acestuia este suficient a se considera câte o singură axă neutră tangentă la contur.

b1.1 *Secțiunea circulară plină* (fig. 15.6,a)

$$i_y^2 = i_z^2 = i^2 = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{D^2}{16}$$

Pentru axa neutră în poziția n_1-n_1; $a_y = \frac{D}{2}$; $a_z = \infty$ rezultă:

$$y_{o1} = y_o = -\frac{\left(\frac{D^2}{16}\right)}{\left(\frac{D}{2}\right)} = -\frac{D}{8}; \quad z_{o1} = z_o = 0.$$

Sâmburele central este reprezentat prin cercul de rează R/4.

b1.2 *Secțiunea inelară* (fig. 15.6,b)

$$i_y^2 = i_z^2 = i^2 = \frac{\frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}}{\frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4}} = \frac{D^2 + d^2}{16}$$

Pentru axa neutră tangentă în poziția n_2-n_2; $a_y = \frac{d}{2}$; $a_z = \infty$, cu relațiile(15.9) se obțin:

$$y_o = -\frac{\left(D^2 + d^2\right)}{16} \cdot \left(-\frac{2}{D}\right) = \frac{D^2 + d^2}{8D}$$

Dacă pereții secțiunii inelare sunt subțiri, D≅d, astfel că limita sâmburelui central a

secțiunii inelare devine: $y_0 \equiv \frac{D^2 + D^2}{8D} = \frac{2D^2}{8D} = \frac{D}{4}$,

fiind dublă față de limita sâmburelui central al secțiunii circulare pline. Urmare a acestui fapt, secțiunile circulare inelare prezintă o comportare la compresiune excentrică mai bună decât cele circulare pline.

b1.3 *Secțiunea I* (fig. 15.7)

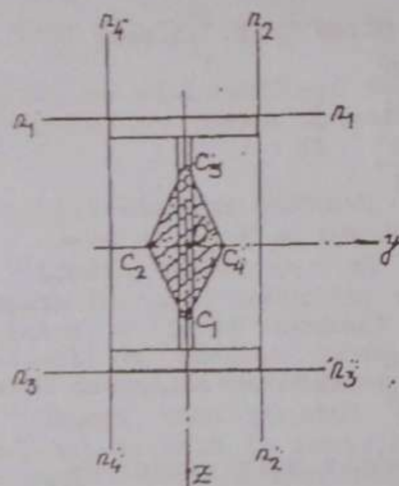


Fig. 15. 7

Pe baza dimensiunilor geometrice ale secțiunii se calculează

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad \text{și} \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A}.$$

Ducând apoi drepte tangente la contur în pozițiile n_1-n_1, n_2-n_2, n_3-n_3 și n_4-n_4, se stabilesc tăieturile fiecăreia a_y, a_z pe axele Oy și Oz după care, cu relațiile (15.9) se găsesc coordonatele punctelor C_1, C_2, C_3 și C_4. Unind aceste puncte se obține un romb ce reprezintă limitele sâmburelui central al secțiunii.

Observație

Cunoașterea limitelor sâmburelui central prezintă o importanță deosebită în alcătuirea elementelor de construcție, solicitate la compresiune excentrică, executate din materiale ce nu preiau tensiuni de întindere (zidării de cărămidă sau piatră, betoanele nearmate etc). Acestea trebuie astfel alcătuite încât forța excentrică să fie aplicată în limitele sâmburelui central, poziție din care aceasta produce numai tensiuni de compresiune ce pot fi preluate de material.

În acest caz se zice că lucrează întreaga secțiune sau că toată secțiunea este activă. Dacă forța excentrică este aplicată în afara sâmburelui central, o anumită zonă din secțiune în care se dezvoltă tensiuni de întindere, devine inactivă, materialul neputând prelua întinderi.

15.3 ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE EXCENTRICĂ CÂND PUNCTUL DE APLICAȚIE AL FORȚEI ESTE SITUAT PE O AXĂ PRINCIPALĂ DE INERȚIE A SECȚIUNII

La numeroase elemente de construcție solicitarea axială este însoțită de încovoiere plană, echivalentul ei fiind reprezentat printr-o forță având punctul de aplicație situat pe una din axele principale de inerție ale secțiunii. (fig. 15.8)

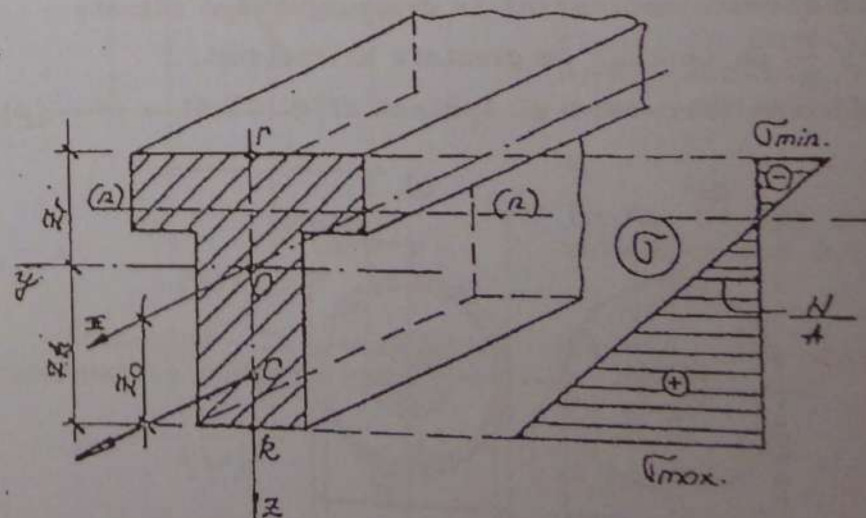


Fig. 15.8

Redusă în centrele de greutate ale secțiunilor, forța P dă naștere eforturilor

$$N = P$$
$$M_y = P \cdot z_o = N \cdot z_o \quad (15.10)$$
$$M_z = 0$$

Starea de tensiune într-o astfel de secțiune se obține cu relația (15.3) particularizând eforturile conform relației (15.10):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (15.11)$$

sau cu relația 15.4 în care se înlocuiește $y_o = 0$, corespunzător abscisei punctului C de aplicație a forței excentrice

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{z z_o}{i_y^2}\right) \quad (15.12)$$

Făcând în ecuația (15.12) pe $\sigma = 0$, se obține ecuația axei neutre

$$1 + \frac{z z_o}{i_y^2} = 0 \quad (15.13)$$

care reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy la distanța

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_o} \quad (15.14)$$

Tensiunile normale extreme iau naștere în punctele k și r, cele mai depărtate de axa neutră

$$\sigma_k = \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_k \quad (15.15,a)$$

$$\sigma_r = \sigma_{min} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_r \quad (15.15,b)$$

În cazul secțiunii dreptunghiulare, frecvent folosită în alcătuirea elementelor solicitate la compresiune excentrică, relațiile de calcul suferă simplificări importante luând forme simple, ușor de aplicat în rezolvarea problemelor practice. Într-adevăr, notând $z_o = e$, excentricitatea forței P și

cu $i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh} = \frac{h^2}{12}$, relația (15.12) devine

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{12e}{h^2} z\right) \quad (15.16)$$

Cu aceeași substituție, ecuația axei neutre ia forma $1 + z \cdot e \cdot \frac{1}{\frac{h^2}{12}} = 1 + \frac{12e}{h^2} z = 0$ având tăietura pe axa Oz

$$a_z = -\frac{h^2}{12e} \quad (15.17)$$

fiind reprezentată printr-o dreaptă paralelă cu axa Oy, la distanța a_z de aceasta.

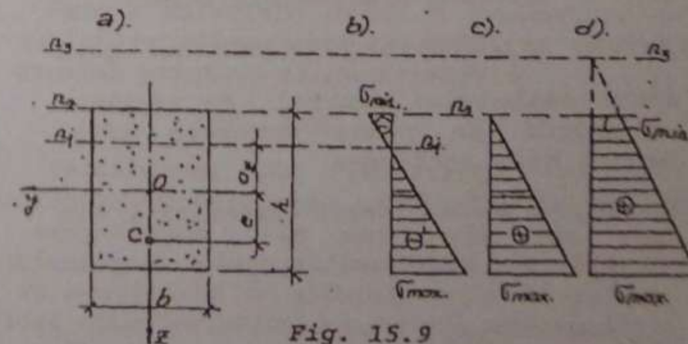


Fig. 15.9

Tensiunile extreme iau naştere în punctele cele mai depărtate de axa neutră respectiv în punctele de ordonate $\pm\frac{h}{2}$. Introducând în relaţia (15.11) ordonata $z = \pm\frac{h}{2}$, câtul $\frac{z}{I_y}$ devine

$$\frac{\pm\frac{h}{2}}{I_y} = \pm\frac{1}{\frac{I_y}{\left(\frac{h}{2}\right)}} = \pm\frac{1}{W_y},$$ cu care tensiunile σ din fibrele extreme vor avea expresia

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} \qquad (15.18)$$

Observând că $M_y = N \cdot e$ şi $W_y = \frac{bh^2}{6} = b \cdot h \cdot \frac{h}{6} = A\frac{h}{6}$, ecuaţia (15.18) devine

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{N \cdot e}{\frac{A \cdot h}{6}} = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6e}{h}\right) \qquad (15.19)$$

Funcţie de valoarea raportului $\frac{6e}{h}$, respectiv de mărimea excentricităţii $e = \frac{M_y}{N}$, în baza relaţiei (15.19), se disting următoarele cazuri:

a) $\frac{6e}{h} > 1$ sau $e > \frac{h}{6}$; forţa excentrică este aplicată în afara sâmburelui central. Pe secţiune iau naştere tensiuni de semne contrare (fig. 15.9,b). Axa neutră taie secţiunea;

b) $\frac{6e}{h} = 1$ sau $e = \frac{h}{6}$ - forţa excentrică are punctul de aplicaţie pe limita sâmburelui central. În secţiune iau naştere tensiuni de acelaşi semn (natură) având o distribuţie triunghiulară (fig. 15.9,c). Axa neutră este tangentă la conturul secţiunii.

c) $\frac{6e}{h} < 1$ sau $e < \frac{h}{6}$ - forţa excentrică are punctul de aplicaţie în interiorul sâmburelui central. Tensiunile normale σ sunt de aceeaşi natură (întinderi sau compresiuni) şi au o distribuţie trapezoidală (fig. 15.9,d). Axa neutră având poziţia n_3-n_3, nu taie secţiunea.

15.4 COMPRESIUNE EXCENTRICĂ ÎN CAZUL MATERIALELOR CE PREIAU TENSIUNI DE ÎNTINDERE

Dacă punctul de aplicaţie al forţei excentrice de compresiune este situat în afara sâmburelui central al secţiunii, axa neutră corespunzătoare taie secţiunea, divizând-o în două părţi, una comprimată şi alta întinsă (fig. 15.9,b). Atunci când materialul nu preia tensiuni de întindere, partea întinsă fisurează, devenind o zonă *inactivă*, acţiunea forţei excentrice P fiind preluată numai de partea comprimată care formează *zona activă* a secţiunii.

În practică, astfel de situaţii pot fi întâlnite în secţiunile elementelor de zidărie din cărămidă sau piatră, în secţiunile de frontieră dintre talpa fundaţiilor şi terenul de fundare precum şi a celor din beton simplu sau armat. Pentru ilustrare vom considera secţiunea dreptunghiulară din figura 15.10, supusă acţiunii unei forţe P, având excentricitatea $e = \frac{M_y}{N} > \frac{h}{6}$.

Admiţând o distribuţie liniară a tensiunilor σ pe înălţimea zonei active, volumul acestora N, din

secţiune trebuie să fie echivalent cu forţa P ce solicită secţiunea în punctul C(0,e).

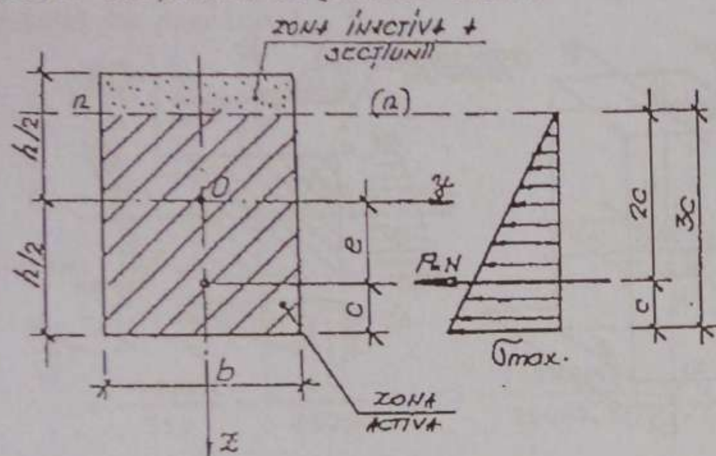


Fig. 15.10

Exprimând această echivalenă (N=P) rezultă

$N = \frac{\sigma_{max} \cdot h \cdot 3c}{2}$, din care se obţine

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3bc} \qquad (15.20)$$

în care, din considerente geometrice, $c = \frac{h}{2} - e$.

Înlocuind această valoare în relaţia (15.20) se obţine expresia

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3b\left(\frac{h}{2} - e\right)} = \frac{4N}{3b\,(h - 2e)} \qquad (15.21)$$

care pune în evidenţă că pentru e = constant, tensiunea σ_{max} este proporţională cu forţa axială N.

Dacă poziţia acesteia se apropie de marginea secţiunii tensiunile σ_{max} cresc, ajungând la ∞ pentru

$e = \frac{h}{2}$ (c=0) aşa cum rezultă din relaţia (15.20).

Pentru $e > \frac{h}{6}$, relaţia (15.21) devine inaplicabilă.

15.5 CALCULUL PRACTIC DE REZISTENŢĂ LA COMPRESIUNE ŞI ÎNTINDERE EXCENTRICĂ

Problemele calculului de rezistenţă la compresiune sau întindere excentrică privesc *verificarea*, *dimensionarea* şi stabilirea *capacităţii portante* a unui element structural.

Rezolvarea acestora ca şi în cazul celorlalte solicitări simple sau compuse se face pornind de la condiţia ca în secţiunea cea mai solicitată (secţiunea periculoasă), tensiunile extreme să fie inferioare rezistenţelor de calcul ale materialului. Pentru materiale prezentând comportare diferită la întindere şi compresiune, aceasta are forma

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} \le R_t\,(R_c) \qquad (15.22)$$

valoarea tensiunilor σ_{max} şi σ_{min} determinându-se conform paragrafelor 15.1, 15.3 şi 15.4.

Pentru materiale având o comportare identică la întindere şi compresiune condiţia de rezistenţă se exprimă printr-o singură relaţie

$$|\sigma|_{max} \le R \qquad (15.23)$$

Verificarea de rezistenţă se face în secţiunile în care apar tensiunile de întindere şi de compresiune cele mai mari (de regulă în secţiunile de eforturi secţionale N, M_y, M_z maxime şi în secţiunile cu slăbiri, unde în calcul se vor folosi caracteristicile nete ale acestora).

Dimensionarea unui element este posibilă numai prin încercări. Pentru aceasta se alege o secţiune (ca formă şi dimensiuni) şi apoi se verifică.

Dacă condiţia de rezistenţă sau diferenţa R-σ_{max} sunt nesatisfăcătoare, dimensiunile secţiunii se modifică în sens corespunzător şi calculul se reia. De regulă, după 2-3 tatonări se ajunge la secţiunea căutată.

Capacitatea portantă a unui element solicitat la compreşiune sau întindere excentrică se obţine pe baza relaţiilor (15.22) şi (15.23) luate la limită în punctul cel mai solicitat al barei. Poziţia acestuia va fi căutată în secţiunile de eforturi maxime sau cu slăbiri. Pentru o mai uşoară şi intuitivă selectare este recomandată trasarea diagramelor σ, în secţiunile respective, din fiecare efort separat. Punctul de tensiune maximă de întindere sau compresiune rezultă prin suprapunerea efectelor (exemplul 16.6.3).

15.6 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 15.6.1

Un stâlp din lemn de secţiune 25x30 cm este încărcat cu o forţă P = 300 kN (fig. 15.11,a) în secţiunea de capăt, în punctul C(-3;5). Se cer eforturile secţionale şi tensiunile normale în colţurile secţiunii şi în punctul C.

Rezolvare

Reducând forţa P în oricare punct al axei longitudinale a stâlpului se obţin eforturile:

$N = -P = -300$ kN; $M_y = -P\cdot z_C = -300\cdot 5 = -1500$kNcm;

$M_z = P\cdot y_0 = 300\cdot 3 = 900$ kNcm;

Având dimensiunile secţiunii se calculează caracteristicile ei geometrice:

$$A = 25\cdot 35 = 750 \text{ cm}^2$$

$$W_y = 25\cdot\frac{30^2}{6} = 3750 \text{ cm}^3$$

$$W_z = 25^2\cdot\frac{30}{6} = 3125 \text{ cm}^3$$

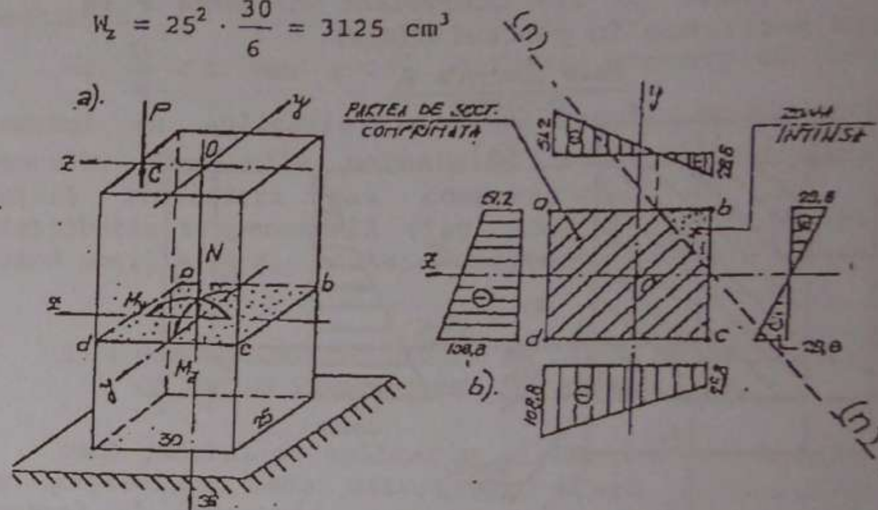


Fig. 15.11

Observând că momentul M_y produce întinderi în c şi d şi compresiuni în a şi b, iar momentul M_z dă naştere la întinderi în a şi b şi compresiuni în c şi d, cu relaţiile (15.8) vom avea:

$$\sigma_a = -\frac{30000}{750} - \frac{150000}{3750} + \frac{90000}{3125} = -51,2\ \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_b = -\frac{30000}{750} + \frac{150000}{3750} + \frac{90000}{3125} = 28,8\ \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_c = -\frac{30000}{750} + \frac{150000}{3750} - \frac{90000}{3125} = -28,8\ \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_d = -\frac{30000}{750} - \frac{150000}{3750} - \frac{90000}{3125} = -108,8\ \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

Pentru calculul tensiunii normale în punctul C(-3 şi 5) se aplică relaţia generală (15.3), calculând în prealabil

$$I_y = 25 \times \frac{30^3}{12} = 56250 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 30 \times \frac{25^3}{12} = 39062,5 \text{ cm}^4.$$

Vom avea:

$$\sigma_C = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_C + \frac{M_z}{I_z} y_C =$$

$$= \frac{-30000}{750} + \frac{(-150000)}{56250}(+5) + \frac{(+90000)}{39062,5}(-3) =$$

$$= -40-13,303-6,912 = -60,215 \text{ daN/cm}^2.$$

Reprezentând grafic valorile găsite, se obţin diagramele de variaţie ale tensiunilor pe laturile secţiunii (fig. 15.11,b)

Observaţie

Punctele de pe contur în care σ=0, aparţin axei neutre. Unind cele două puncte situate pe latura superioară şi cea laterală dreapta se obţine axa neutră în secţiunea n-n.

Exemplul 15.6.2

Un stâlp din beton simplu (γ = 22kN/m³) având secţiunea transversală de 40x60 cm este încărcat cu o forţă centrică P = 40 kN şi o sarcină orizontală uniform distribuită q = 4 kN/m dată de vânt. Fundaţia stâlpului are dimensiunile în plan 70x100 cm, înălţimea de 0,60 m şi este realizată centric (fig. 15,12,a). Cunoscând că în secţiunea 1-1 de la baza stâlpului se admit tensiuni de întindere de 3 daN/cm², iar în secţiunea 2-2 de la baza fundaţiei nu se admit întinderi, se cere să se traseze

diagramele de tensiuni normale în cele două secţiuni.

Rezolvare

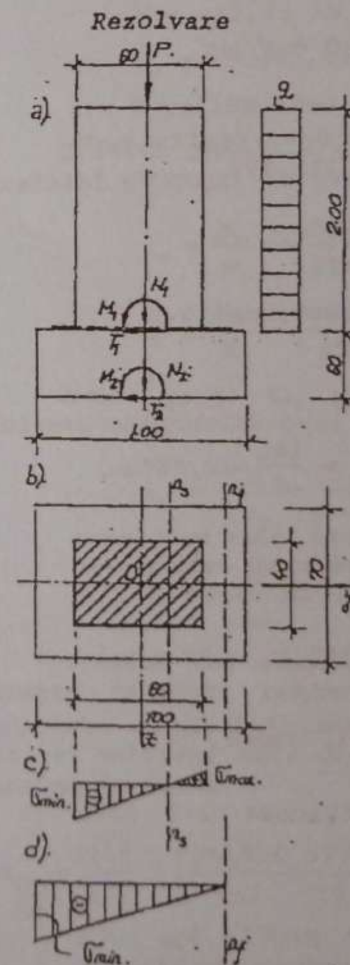


Fig. 15.12

Se calculează greutatea stâlpului G_s şi a fundaţiei G_f:

$G_s = \gamma V_s = 22x0,4x0,6x2 = 10,56$ kN

$G_f = \gamma V_f = 22x0,7x1x0,6 = 9,24$ kN

Se calculează eforturile în centrul de greutate al secţiunii 1-1:

$N_1 = -(P+G_s) = -50,56$ kN;

$M_{z1} = M_1 = 2q\times1 = -8$kNm;

$T_{y1} = T_1 = 2q = 8$kN;

$$e_1 = \frac{M_1}{N_1} = \frac{80000}{5056} = 15,822 \text{cm} > \frac{h}{6} = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm}$$

(axa neutră taie secţiunea).

Aplicând relaţia (15.19) se obţin tensiunile:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N_1}{A}\left(1 \pm \frac{6e}{h}\right) = -\frac{5056}{40 \times 60}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 15,822}{60}\right) =$$

$$= -2,107(1 \pm 1,582),$$

$$\sigma_{max} = -2,107(1-1,582) = +1,227 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{min} = -2,107(1+1,582) = -5,440 \text{ daN/cm}^2.$$

Cu valorile găsite, diagrama tensiunilor σ s-a trasat în figura 15.12,c. Poziţia axei neutre n_3-n_3 în secţiune va fi dată de relaţia (15.17)

$$a_y = -\frac{h^2}{12e_1} = -\frac{3600}{12 \times 15,822} = -18,961 \text{ cm}.$$

• Se calculează eforturile în secţiunea 2-2 :

$N_2 = N_1 - G_t = -59,80$ kN;

$M_2 = -2x4x(0,6+1) = -12,80$ kNm

$$e_2 = \frac{M_2}{N_2} = \frac{128000}{5980} = 21,405\text{cm} > \frac{h_2}{6} = \frac{100}{6} = 16,667\text{cm},$$

rezultă că axa neutră taie secţiunea. Cum secţiunea 2-2 nu poate prelua întinderi, tensiunea maximă (în modul) se obţine cu relaţia (15.20) în care:

$$c = \frac{h_2}{2} - e_2 = 50 - 16,667 = 33,330 \,;\, b_2 = 70 \text{ cm};$$

$$\sigma_{max} = \frac{2N_2}{3b_2c} = \frac{245980}{3 \cdot 70 \cdot 33,330} = -1,709\text{daN / cm}^2$$

Diagrama tensiunilor în secţiunea 2-2 este dată în figura 15.12,d.

Exemplul 15.6.3

O consolă realizată dintr-un profil I_{30} este încărcată cu sistemul de forţe arătat în figura

15.13. Cunoscând R = 2100 daN/cm², ℓ = 3,20 m; q = 20 kN/m se cere:

a) să se determine forţa capabilă a barei P_{cap};

b) corespunzător acesteia, să se traseze diagrama σ în secţiunea de încastrare a barei.

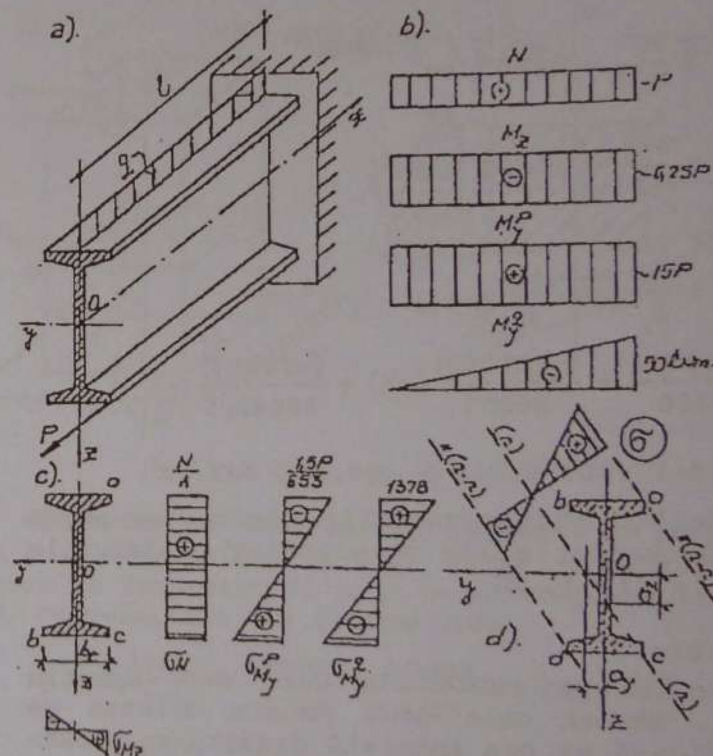


Fig. 15.13

Rezolvare

a) Din anexa 5 se scot caracteristicile profilului I_{30}: A = 69,40 cm², W_y = 653 cm³; W_z = 72,2 cm³; b_t = 12,5 cm; i_y^2=141,61 cm²; i_z^2= 6,55 cm²

Se trasează diagramele de eforturi pe bara din încărcarea dată (fig. 15.13,b)

În secțiunea de încastrare se exprimă tensiunile normale σ și se trasează diagramele lor din fiecare efort separat (fig. 15.13,c).

$$\sigma_N = \frac{P}{A}; \quad \sigma^{(P)}_{M_y} = \pm \frac{M_y^P}{W_y} = \pm \frac{15P}{653}$$

$$\sigma^{q}_{M_y} = + \frac{M_y^q}{W_y} = \pm \frac{900000}{653} = \pm 1378 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{M_z} = \pm \frac{M_z}{W_z} = \pm \frac{6,25P}{72,2}$$

În colțurile profilului vom avea:

$$\sigma_a = \frac{P}{69,10} + \frac{6,25P}{72,2} - \frac{15P}{653} + 1378 \text{ daN/cm}^2$$

$$= 0,0781\ P + 1378 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{P}{69,10} - \frac{6,25P}{72,2} - \frac{15P}{653} + 1378 \text{ daN/cm}^2$$

$$= -0,09506P + 1378 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{P}{69,10} + \frac{6,25P}{72,2} + \frac{15P}{653} - 1378 \text{ daN/cm}^2 =$$

$$= 0,124P - 1378 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_d = \frac{P}{69,10} - \frac{6,25P}{72,2} + \frac{15P}{653} - 1378 \text{ daN/cm}^2 =$$

$$= -0,04912P - 1378 \text{ daN/cm}^2$$

Comparând valorile tensiunilor σ_a, σ_b, σ_c și σ_d rezultă: $\sigma_{max} = \sigma_a$; $\sigma_{min} = \sigma_d$. Bara fiind din oțel la care $R_t = R_c = R$, condiția de rezistență se va exprima prin relația (15.23), luată la limită $\sigma_{max} = 0,0781\ P_{cap} + 1378 = R = 2100$ din care se obține: $P_{cap} = 9245$ daN = 92,45 kN.

b) cu valoarea găsită, eforturile în secțiunea de încastrare vor fi:

$$N = +92,45 \text{ kN}$$

$$M_y = -90 + 92,45 \cdot 0,15 = -76,1325 \text{ kNm}$$

$$M_z = -92,45 \cdot 0,0625 = -5,7781 \text{ kNm}$$

O forță paralelă cu axa barei care ar produce aceleași eforturi ar avea excentricitățile

$$y_0 = \frac{M_z}{N} = \frac{-57781}{9245} = -6,25 \text{ cm}$$

$$z_0 = \frac{M_y}{N} = \frac{-761325}{9245} = -82,35 \text{ cm}$$

Având y_0 și z_0, cu relațiile (15.6) se calculează tăieturile axei neutre a secțiunii pe axe:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{6,55}{-6,25} = 1,028 \text{ cm}$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{141,61}{-82,35} = +1,72$$

Trasând axa neutră (n-n) în secțiune și ducând drepte tangente conturului acesteia se regăsesc punctele a și d în care tensiunile normale σ au valori extreme, date de relația (15.8), ce poate fi scrisă în forma:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{9245}{69,10} \pm \left(\frac{761325}{653} + \frac{57781}{72,2}\right) = 133,792 \pm 1966,18;$$

$$\sigma_{max} = 133,792 + 1966,18 = 2099,972 \cong 2100 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{min} = 133,792 - 1966,18 = 1833,388 \cong -1832 \text{ danN/cm}^2$$

Diagrama tensiunilor normale σ în secţiunea de încastrare este arătată în figura 15.13,d.

Exemplul 16.6.4

Un zid de subsol din beton simplu (γ_b = 22 kN/m³ suportă încărcarea dată de etajele superioare, acţionând centric cu intensitatea P = 80 kN/m şi împingerea laterală a pământului (γ_p = 16 kN/m³) echivalentă cu o forţă orizontală H = 30 kNm, acţionând ca în figura 15.14,d.

Se cere:

a) verificarea de rezistenţă a zidului cunoscând că rezistenţa de calcul a betonului la întindere este R_t = 4,50 daN/cm².

b) Poziţionarea zidului pe fundaţie astfel încât pe talpa fundaţiei să nu apară tensiuni de întindere(întreaga talpă a fundaţiei să fie activă)

Rezolvare

Peretele de subsol şi fundaţia fiind elemente lungi se vor calcula pe lungimi de 1,00 m, ca stâlpi de secţiune trnsversală bx100 = 60x100 cm (fig. 15.14,b) şi respectiv Bx100 cm (fig. 15,14,c) încărcaţi cu forţe verticale coliniare cu axa x (verticală) şi cu forţa orizontală H, aplicată ca în figura 15.14,a şi 15.14,b. Intensităţile acestora au valorile G_1 = 0,6x1,0x4x22 = 52,80 kN G_2 = 1,0 x 1,30 x 0,8x22 = 22,88 kN; P = 80 kN/mx1m = 80 kN; H = 30 kN/mx1m = 30 kN

a) Calculul secţiunii 1-1

- Se reduc forţele exterioare în centrul de greutate O1 al secţiunii (fig. 15.14,e);

$$N_1 = -(P+G_1) = -132,80 \text{ kN}$$
$$M_y = 0;$$
$$M_1 = \frac{4}{3}H = \frac{4}{3}\times 30 = 40 \text{ kNm};$$

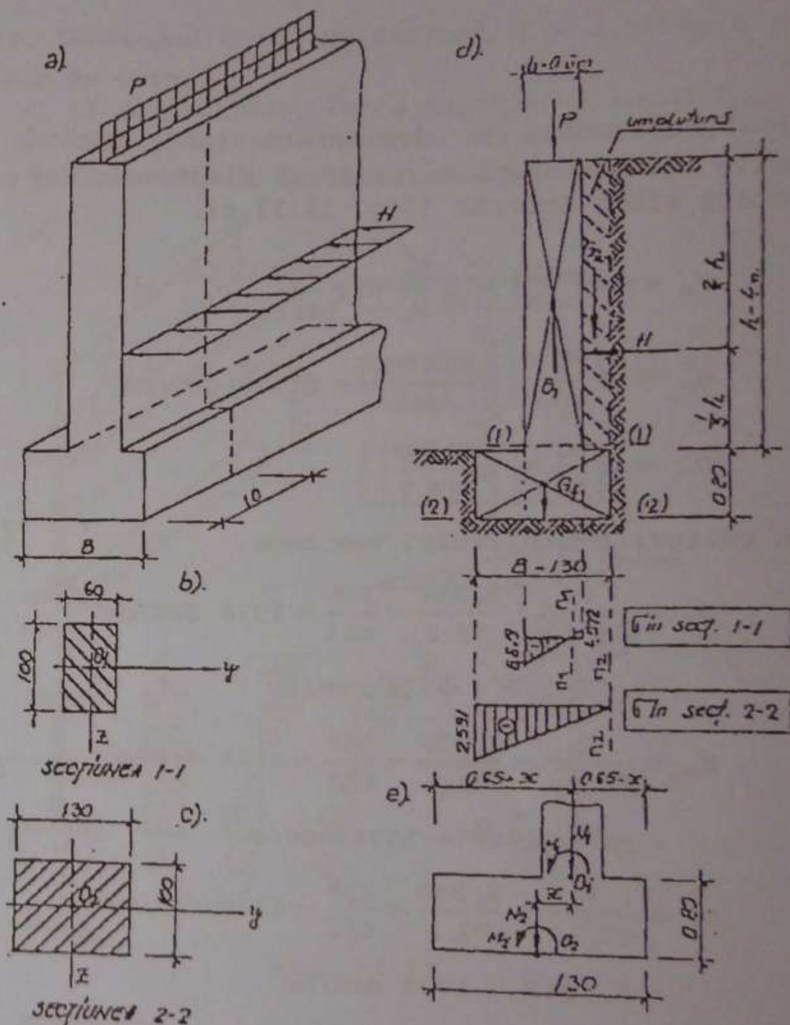


Fig. 15.14

- Se calculează caracteristicile geometrice ale secţiunii 1-1:

$$A = 60\times 100 = 6000 \text{ cm}^2;$$
$$W_z = \frac{100\times 60^2}{6} = 60000 \text{ cm}^3;$$

• Se calculează excentricitatea forţei axiale în secţiunea 1-1

$$e_1 = \frac{M_1}{N_1} = \frac{400000}{13280} = 30,12\text{cm} > \frac{h}{2} = \frac{60}{6} = 10\text{cm}$$

(axa neutră taie secţiunea)

• Utilizând relaţia (15.19)

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{N_1}{A_1}\left(1 \pm \frac{6e_1}{h_1}\right) = -\frac{13280}{6000}\left(1 \mp \frac{6 \times 30,12}{60}\right) =$$

$$= -2,213(1\mp 3,012)$$

$$\sigma_{max} = 4,452 \text{ daN/cm}^2 < R_t = 4,5 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{min} = -8,879 \text{ daN/cm}^2$$

• Se trasează axa neutră în secţiune utilizând relaţia (15.17)

$$a_y = -\frac{h^2}{12e_1} = -\frac{60^2}{12 \cdot (-30,12)} = 9,96\text{cm}$$

Diagrama tensiunilor σ în secţiune este dată în fig. (15.14,d).

b) Calculul secţiunii 2-2

Notând cu x distanţa dintre centrele de greutate ale secţiunilor 1-1 şi 2-2 şi cu G_u = (0,35-x)x1x4x16 = (0,35-x)x64 kN greutatea prismei de umplutură situate pe talpa fundaţiei, eforturile în punctul O_2 (fig. 15.14,d şi e) vor fi:

$$N_2 = N_1 - G_t - G_u = -132,80-22,88-64(0,35-x) =$$

$$= -178,08+64x = -(178,08-64x)$$

$$M_{y,2} = 0;$$

$$M_2 = \left(\frac{4}{3} + 0,8\right)H - (G_1 + P)x - G_u\left(x + \frac{0,65 - x}{2}\right) =$$

$$= 40 + 24 - 52,8x - 64(0,35 - x)\left(x + 0,65 - x\,\frac{0,35 - x}{2}\right) =$$

$$= 64-132,8x-64(0,35-x)(0,475+0,5x) =$$

$$= 32x^2-113,6x+53,36$$

Pentru ca pe întreaga secţiune a tălpii să avem tensiuni de compresiune, este necesar ca axa neutră să ocupe poziţia n_2-n_2 (fig. 15.14,d) căreia îi corespunde o excentricitate a forţei N_2 egală cu limita sâmburelui central, aflată în cadranul opus celui în care se află n_2-n_2. Vom avea:

$$y_o = e_2 = -\frac{h}{6} = -\frac{130}{6} = -21,667 \text{ cm} = -0,217 \text{ m.}$$

Pe de altă parte, funcţie de M_2 şi N_2,

$$e_2 = \frac{M_2}{N_2} = \frac{32x^2 - 113,6x + 53,36}{-(178,08 - 64x)}.$$

Egalând cele două excentricităţi se obţine ecuaţia $\frac{32x^2 - 113,6x + 53,36}{-(178,08 - 64x)} = 0,217$, care se mai scrie $32x^2 - 99,712x + 14,717 = 0$ şi care are rădăcinile $x_1 = 2,96$ m; $x_2 = 0,155$ m. Eliminând soluţia străină x_1 şi reţinând numai soluţia $x = x_2 = 0,155$ m, cu aceasta eforturile în secţiune 2-2 devin:

$$N_2 = -(178,08 - 64x0,155) = -168,16 \text{ kN;}$$

$$M_2 = 32x0,155^2 - 113,6x0,155+53,36 = -36,521 \text{ kNm}$$

Pentru e_2 = 0,217 m, folosim relaţia (15.19)

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{N_2}{A_2}\left(1 \mp \frac{6e_2}{h_2}\right) = \frac{-16816}{130x100}\left(1 \mp \frac{6x21,7}{130}\right) =$$

$$= -1,294(1 \mp 1,022)$$

$$\sigma_{max} = -1,294\ (1-1,002) \cong 0$$

$\sigma_{min} = -1,294(1+1,002) = -2,591$ daN/cm²

Diagrama de variaţie a acestora pe secţiunea 2-2 este arătată în figura 15.14,d.

Exemplul 15.6.5

Se cere dimensionarea unui zid de sprijin din piatră (γ_z = 22 kN/m³), destinat preluării împingerii laterale a pământului având o distribuţie triunghiulară de intensitate maximă 35 kN/m² (fig. 15.5). În secţiunea 1-1 la baza zidului de sprijin se admit întinderi R_t = 0,60 daN/cm² şi compresiuni R_c = 7,0 daN/cm². În secţiunea 2-2 nu se admit întinderi, iar tensiunea maximă de compresiune nu va depăşi 2,00 daN/cm².

Rezolvare

Se adoptă pentru zidul de sprijin o secţiune trapezoidală şi se aleg dimensiunile b_o = 80 cm, b = 2,00 m, b_u = 25 cm (fig. 15.15,a). Fiind elemente lungi, zidurile de sprijin se calculează pe lungimea de 1 m, ca stâlpi având dimensiunile de bx100 (pentru zidul propriu-zis) şi Bx100 pentru fundaţie (fig. 15.15, b şi d).

a) Verificarea secţiunii 1-1 a zidului

$$G_1 = 0,80 \times 4,50 \times 1 \times 22 = 79,20 \text{ kN}$$

$$G_2 = \frac{1}{2} 1,20 \times 4,50 \times 1 \times 22 = 59,40 \text{ kN}$$

$$N_1 = -(G_1 + G_2) = -138,60 \text{ kN}$$

$$M_1 = 4,50 \times \frac{35}{2} \times \frac{1}{3} 4,5 - G_1 \times 0,60 + G_2 \times 0,20 =$$
$$= 101,25 - 47,52 - 11,88 = 82,485 \text{ kNm}; \; M_{y1} = 0$$

$$e_1 = \frac{M_1}{N_1} = \frac{756000}{-13860} = -59,513 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{6} = \frac{200}{6} = 33,33 < e_1 = 59,513 \text{ cm}$$

rezultă ca axa neutră taie secţiunea; tensiunile extreme în aceasta se calculează cu relaţia (15.19).

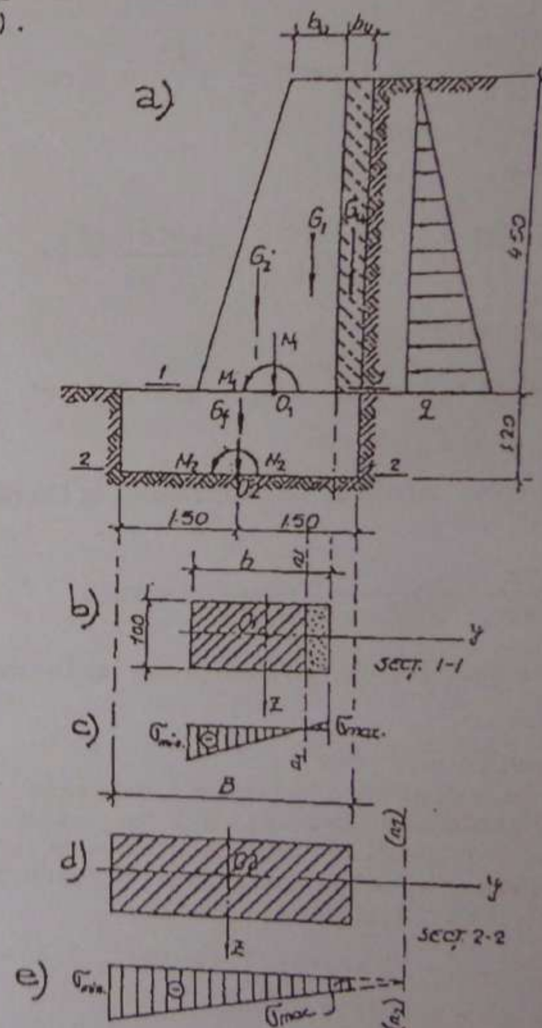


Fig. 15.15

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N_1}{A_1}\left(1 \mp \frac{6e_1}{b}\right) = -\frac{13800}{100 \times 200}\left(1 \mp \frac{6 \cdot 59,513}{200}\right) =$$

$$= -0,69\,(1 \mp 1,785)\ daN/cm^2$$

$\sigma_{max} = -0,69(1-1,785) = 0,542\ daN/cm^2 < R_t$

$\sigma_{min} = -0,69(1+1,785) = -1,922\ daN/cm^2$

$|\sigma_{min}| = 1,922\ daN/cm^2 < R_c$

Abscisa axei neutre calculată cu relația (15.17) în secțiune va fi:

$$a_{y1} = -\frac{b^2}{12e_1} = -\frac{200^2}{12 \times (-59,513)} = +56,010\ cm$$

Diagrama tensiunilor σ în secțiunea 1-1 este arătată în figura (15.15,c)

Alcătuirea secțiunii 2-2

$G_u = 0,25 \times 4,5 \times 1 \times 18 = 20,25$ kN. Alegând pentru blocul de fundație $h_f = 1,20$ m; $B = 3,00$ m; vom avea:

$G_f = 3 \times 1,2 \times 1 \times 22 = 79,20$ kN

$N_2 = N_1 - (G_u + G_f) = -238,05$ kN

$$M_2 = \left(1,2 + \frac{1}{3}4,5\right)H - (1,50 - 0,125)\,G_u - (1,50 - 0,65)\,G_1 -$$

$$-\left(1,5 - 0,25 - 0,80 - \frac{1}{3}1,2\right)G_2 =$$

$$= 212,625 - (27,844 + 77,22 + 2,97) =$$

$$= 104,591\ kNm;$$

$$e_2 = \frac{M_2}{N_2} = -\frac{1045910}{23805} = -43,936\,cm$$

$$\frac{B}{6} = \frac{300}{6} = 50cm\,;$$

$e_2 = 43,936$ cm $< \frac{B}{6} = 50$ cm; axa neutră nu taie secțiunea.

Folosind relația (15.19)

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N_2}{100B}\left(1 \mp \frac{6e_{y2}}{B}\right) = -\frac{23805}{30000}\left(1 \mp \frac{6 \cdot 43,936}{300}\right) =$$

$$= -0,794\,(1 \mp 0,879)$$

$\sigma_{max} = -0,096\ daN/cm^2$

$\sigma_{min} = -1,492\ daN/cm^2$.

Axa neutră este dată de abscisa acesteia calculată cu relația (15.17).

$$a_{y2} = -\frac{B^2}{12e_{y2}} = -\frac{300^2}{12 \times (-43,936)} = 170,703\,cm = 1,707\,m\,;$$

Cum $\sigma_{max} < 0$ și $|\sigma_{min}| < R_c$, secțiunea 2-2 poate fi acceptată ca fundație a zidului de sprijin. Distribuția tensiunilor în aceasta este dată în figura 15.15,e.

CAPITOLUL 16

ÎNCOVOIEREA CU TORSIUNE

16.1 GENERALITĂȚI. EFORTURI SECȚIONALE

O bară este solicitată la încovoiere cu torsiune atunci când încărcările ce-i sunt aplicate produc în secțiunile acesteia momente încovoietoare M și momente de torsiune M_t.

Obișnuit, aceste eforturi sunt însoțite și de forțe tăietoare T.

Încărcările ce conduc la astfel de solicitări sunt în general forțe sau sisteme de forțe al căror plan de acțiune nu conține axa barei (fig. 16.1,a). Dacă planul menționat este paralel cu unul din planele xOy sau xOz, torsiunea este cu încovoiere simplă, altfel solicitarea este de încovoiere dublă cu torsiune. În domeniul costrucțiilor, acest tip de solicitare apare frecvent, pentru exemplificare, în figura (16.1,b și c) au fost selectate două exemple ilustrative în acest sens.

Grinda curbă plană încărcată cu forțe conținute în planul xOz (fig. 16.1,b) este solicitată la încovoiere cu torsiune. Într-adevăr, notând coordonatele centrului de greutate a secțiunii curente cu (x,y,0), eforturile produse de forța P în această secțiune vor fi

$$M_y = -P(x_\ell - x)$$

$$M_x = M_t = P(y_\ell - y) \qquad (16.1)$$

$$T_z = P$$

Pentru x=y=0, deci în secțiunea de încastrare, eforturile secționale de mai sus au valoarea maximă

$$M_y = -P \cdot x_\ell$$

$$M_x = M_t = P \cdot y_\ell \qquad (16.2)$$

$$T_z = P$$

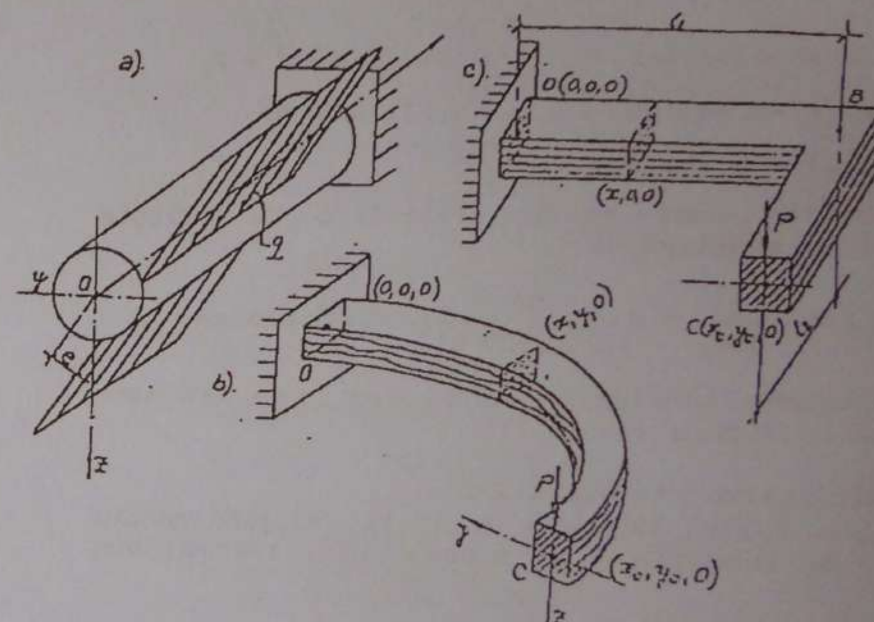


Fig. 16.1

În cazul grinzii cotite din figura 16.1,c, forța P produce în tronsonul BC încovoiere simplă cu forță tăietoare ($M_y \neq 0$; $T_z \neq 0$), iar în tronsonul AB, solicitările menționate sunt însoțite și de torsiune. În secțiunea curentă de coordonate (x,0,0), valorile acestora vor fi:

$$M_y = -P(\ell_1 - x)$$

$$M_x = M_t = P \cdot \ell_2 \qquad (16.3)$$

$$T_z = P$$

Secţiunea periculoasă a barei corespunde secţiunii de încastrare (x=0), pentru care:

$$M_y = -P\cdot \ell_1$$

$$M_x = M_t = P\cdot \ell_2 \qquad (16.4)$$

$$T_z = P$$

Pentru cazuri de încărcări mai complexe, cunoaşterea stării de solicitare a barei rezultă pe baza diagramelor de eforturi (M_y, M_z, T_y, T_z, M_t) care se trasează pe baza regulilor generale stabilite în acest sens în capitolul 7.

16.2 TENSIUNI LA ÎNCOVOIEREA CU TORSIUNE A BAREI DE SECŢIUNE CIRCULARĂ

Referindu-ne la cazul general, al încovoierii duble cu torsiune, produse de încărcări acţionând în acelaşi plan, vectorii M şi T în secţiune sunt perpendiculari (v. cap.2). Având în vedere că orice diametru al secţiunii circulare este o axă de inerţie principală, în studiul stării de tensiune din secţiune vom alege sistemul de axe confundat cu direcţiile vectorilor M şi T (fig. 16.2,a).

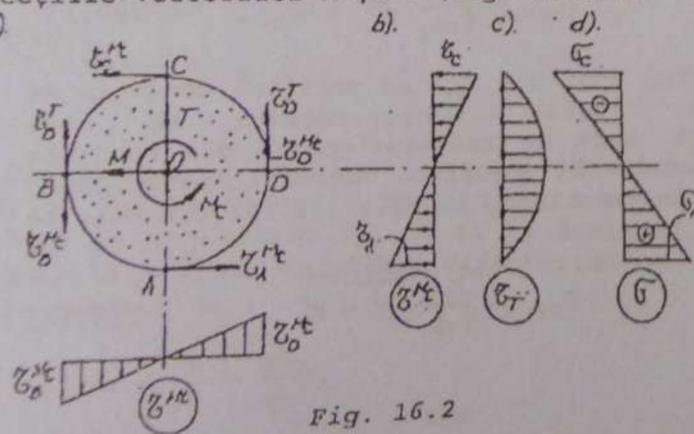


Fig. 16.2

Tensiunile produse în secţiune de eforturile M, T, M_t au fost stabilite în capitolele 11, 12 şi 13, diagramele lor, trasate în figurile 16.2, b,c,d,e au ca valori caracteristice:

- în punctul A:

$$\tau_A^{M_t} = \frac{M_t}{W_p} \;;\; \sigma_A = \frac{M}{W}$$

Tensiunile normale principale în acest punct, în baza formulei (13.41) vor avea expresia:

$$\sigma_{1,2}^A = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{M}{2W} \pm \sqrt{\left(\frac{M}{2W}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} \qquad (16.5)$$

Având în vedere că $W = \frac{\pi D^3}{32}$ iar $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$ rezultă că $W_p = 2W$, astfel că relaţia (16.5) ia forma:

$$\sigma_{1,2}^A = \frac{M}{2W} \pm \sqrt{\left(\frac{M}{2W}\right)^2 + \frac{M_t^2}{(2W)^2}} = \frac{1}{2W}\left(M \pm \sqrt{M^2 + M_t^2}\right) \qquad (16.6)$$

Pe lângă aceste tensiuni, în punctul A vor lua naştere şi tensiuni tangenţiale maxime, date de relaţia (13.43):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1^A - \sigma_2^A}{2} = \frac{1}{2W}\sqrt{M^2 + M_t^2} = \frac{16}{\pi D^3}\cdot\sqrt{M^2 + M_t^2} \qquad (16.7)$$

- în punctul B iau naştere tensiunile

$$\tau_B^{M_t} = \frac{M_t}{W_p} \;;\; \tau_B^T = \frac{4}{3}\cdot\frac{T}{A},$$

având ca rezultantă tensiunea

$$\tau_B = -\tau_B^{M_t} + \tau_B^T = -\frac{M_t}{W_p} + \frac{4}{3}\frac{T}{A} \qquad (16.8)$$

Tensiunile normale din acelaşi punct vor fi:

$$\sigma_{1,2}^B = \pm\tau_B \; ; \; \tau_{max}^B = \tau_B$$

- în punctul C:

$$\tau_C^{M_t} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{2W} \; ; \; \sigma_C = -\frac{M}{W} \qquad (16.9)$$

$$\sigma_{1,2}^C = \frac{1}{2W}\left(-M \pm \sqrt{M^2 + M_t^2}\right)$$

$$\sigma_{max} = \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{M^2 + M_t^2}$$

- în punctul D

$$\tau_D = \tau_D^T + \tau_D^{M_t} = \frac{M_t}{W_p} + \frac{4}{3}\frac{T}{A} = \frac{M_t}{2W} + \frac{4}{3}\frac{T}{A} = \sigma_D^{max} \qquad (16.10)$$

$$\sigma_{1,2}^D = \pm\tau_D \; ; \; \tau_{max}^D = \tau_D$$

Analizând diagramele din figura 16.3, rezultă că punctele secţiunii cele mai solicitate vor fi A şi C în care se înregistrează tensiuni normale σ maxime, din încovoiere, şi tensiuni tangenţiale maxime τ din torsiune.

Din forfecare tensiunile τ_T se găsesc în punctele de pe axa neutră (B şi D), adică tocmai acolo unde tensiunile normale din încovoiere sunt nule; de regulă, tensiunile τ_T au o importanţă secundară şi pot fi neglijate.

16.3 CALCULUL DE REZISTENŢĂ AL BARELOR DE SECŢIUNE CIRCULARĂ SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE CU TORSIUNE

Aşa cum s-a văzut în aliniatul precedent, la acest tip de solicitare, punctele din secţiune cele mai solicitate sunt acelea în care apar tensiuni din încovoiere şi torsiune (în fig. 16.2, punctele A şi C). Având în vedere relaţiile (16.6) şi (16.7), condiţia de rezistenţă în acestea se va exprima prin inegalităţile:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2W}\left(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}\right) = \frac{16}{\pi D^3}\left(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}\right) \le R \quad (16.11)$$

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{M^2 + M_t^2} \le R_f \qquad (16.12)$$

în care R şi R_f sunt rezistenţele de calcul ale materialului.

Verificarea de rezistenţă a unei astfel de bare revine la testarea existenţei relaţiilor (16.11) şi (16.12) în secţiunea ei cea mai solicitată. Luând la limită inegalităţile (16.1) şi (16.2), se obţin relaţiile pentru *dimensionare*. Uzual se foloseşte în acest scop relaţia (16.12) din care rezultă:

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi R_f}\sqrt{M^2 + M_t^2}} \qquad (16.13)$$

Adoptând apoi $D \ge D_{nec}$ se verifică condiţia de rezistenţă (16.11). Dacă aceasta nu este satisfăcută, bara se redimensionează din condiţia de rezistenţă în tensiuni normale principale, utilizând în acest scop relaţia (16.11) din care se obţine:

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi R}\sqrt{M^2 + M_t^2}} \qquad (16.14)$$

Odată stabilit diametrul D se verifică suplimentar tensiunile din punctele B şi D (fig. 16.2).

16.4 TENSIUNI LA ÎNCOVOIEREA CU TORSIUNE A BAREI DE SECŢIUNE DREPTUNGHIULARĂ

Să considerăm o secţiune curentă a tronsonului AB al barei cotite din figura 16.1,c. Din acţiunea forţei P, în aceasta ia naştere un moment $M_y < 0$, forţa tăietoare $T_z > 0$ şi un moment de torsiune M_t, date de relaţiile (16.3). Tronsonul considerat va fi solicitat deci la încovoiere simplă cu forţă tăietoare şi la torsiune (fig. 16.3).

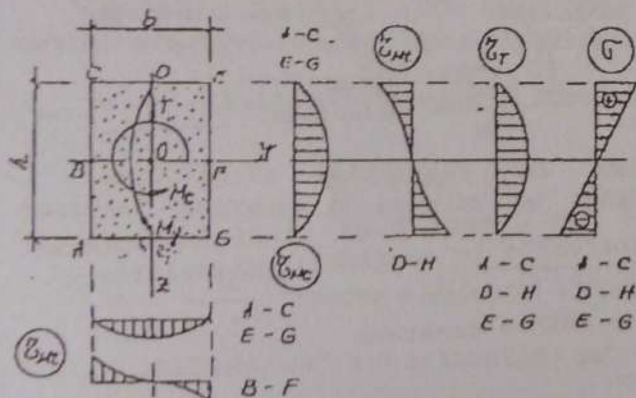


Fig. 16.3

Diagramele de tensiuni produse de eforturile M_y, T_z şi M_x pe diferite direcţii ale secţiunii, stabilite în capitolele 11, 12 şi 13 sunt indicate în figura 16.3 şi au ca valori caracteristice:

- în punctul D:

$$\sigma_n = \frac{M_y}{W_y} = \frac{6M_y}{bh^2},$$

$$\tau_D^{M_t} = \gamma\frac{M_t}{W_t} = \gamma\frac{M_t}{\beta hb^2}$$

Tensiunile normale principale în punctul D vor fi:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_D^2} = \frac{M_y}{2W_y} \pm \sqrt{\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2 + \left(\frac{\gamma M_t}{W_t}\right)^2} \qquad (16.15)$$

Simultan, în punctul D vor exista şi tensiuni tangenţiale maxime date de relaţia

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2 + \left(\frac{\gamma M_t}{W_t}\right)^2} \qquad (16.16)$$

În mod cu totul analog se procedează şi pentru punctul H.

- în punctul F

$$\tau_F^T = \frac{3}{2}\cdot\frac{T}{A}\ ; \quad \tau_F^{M_t} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\beta hb^2}$$

Cele două tensiuni au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, astfel că tensiunea totală va fi

$$\tau_F = \tau_F^T + \tau_T^{M_t} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} + \frac{M_t}{W_t} \qquad (16.17)$$

Tensiunile principale, normale şi tangenţiale în acest punct, vor avea valorile:

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau_F$$
$$\tau_{max} = \tau_F \qquad (16.18)$$

- în punctul B

$$\tau_B^T = \frac{3}{2}\cdot\frac{T}{A}\ ; \quad \tau_B^{M_t} = \frac{M_t}{W_t}$$

Având aceeaşi direcţie dar sensuri opuse, rezultanta acestora va avea modulul

$$\tau_B = \tau_B^T + \tau_B^{M_t} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} + \frac{M_t}{W_t} \qquad (16.19)$$

Dacă bara este supusă la încovoiere oblică şi torsiune, la starea de tensiune dată de M_y, T_z şi M_t se mai adaugă cea produsă de M_x şi T_y.

Analizând diagramele tensiunilor σ şi τ pe secţiunea barei (fig. 16.3), se constată că punctele cele mai solicitate sunt B şi F (în care apar tensiuni tangenţiale maxime din M_t şi T) la care se adaugă H şi D (în care apar tensiuni normale maxime σ din M şi tangenţiale τ, din M_t).

În fiecare din acestea, *condiţia de rezistenţă* a secţiunii se va exprima în tensiuni principale, normale şi tangenţiale, acestea putând avea o pondere importantă. În consecinţă, în punctele menţionate va trebui să avem:

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{2W_y} + \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + \left(\frac{\gamma M_t}{W_t}\right)^2} \le R \qquad (16.20)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + \left(\frac{\gamma M_t}{W_t}\right)^2} \le R_f \qquad (16.21)$$

Problema *dimensionării* secţiunilor acestor bare se rezolvă obişnuit prin încercări, făcându-se apoi *verificarea*, ce constă în testarea existenţei relaţiilor (16.20) şi (16.21) în punctele cele mai solicitate din secţiune.

16.5 EXEMPLU DE CALCUL

O bară cotită din oţel (R = 2100 daN/cm^2 ; R_f = 1300 daN/cm^2) este solicitată ca în figura 16.4. Cunoscând că forţa P acţionează normal pe planul AB şi BC, se cere:

a) trasarea diagramelor de eforturi pe bară;

b) dimensionarea secţiunii barei de formă circulară.

Rezolvare

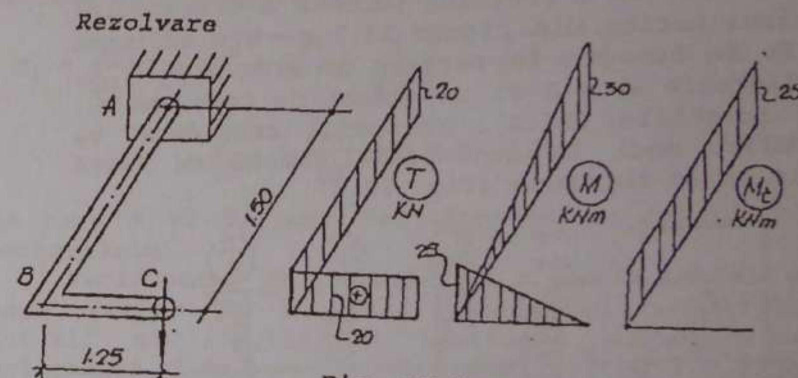


Fig. 16.4

a) Pornind din C spre A şi utilizând metoda secţiunilor, eforturile în secţiunile caracteristice ale barei vor fi:

$T = T_z = P = 20kN$ = constant

$M_C = 0$

$M_{BC} = 1,25\times P = -25kNm$

$M_{BA} = 0\times P = 0$

$M_{AB} = 1,5P = 30$ kNm

$M_{t,C} = M_{t,BC} = 0$

$M_{t,BA} = M_{t,AB} = 1,25\times P = 25$ kNm.

Diagramele eforturilor pe bară sunt indicate în figurile 16.4, b, c și d.

b) Analizând diagramele de eforturi rezultă că secțiunea cea mai solicitată a barei este cea de încastrare în care apar eforturile T = 20 kN, M = 30 kN și M_t = 25 kN, în consecință, aceasta va fi solicitată la încovoiere simplă cu forță tăietoare și torsiune.

Folosind relația (16.13) vom avea:

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \cdot 1300}\sqrt{300000^2 + 250000^2}} = 11,523\,\text{cm}$$

Adoptând D = 12 cm, tensiunile tangențiale maxime efective, vor fi date de relația (16.12):

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot 12^3}\sqrt{300000^2 + 250000^2} = 1150\,\text{daN/cm}^2 < R_t$$

Verificarea condiției de rezistență în tensiuni principale normale se face cu relația (16.11):

$$\sigma_1 = \frac{16}{\pi \cdot 12^3}\left(300000 + \sqrt{300000^2 + 250000^2}\right) =$$

$$= 2035\,\text{daN/cm}^2 < R = 2100\,\text{daN/cm}^2$$

CAPITOLUL 17

STABILITATEA BAREI DREPTE

17.1 GENERALITĂȚI. FENOMENUL FIZIC ȘI EXPLICAREA LUI

Barele cu lungimi relative mari în raport cu dimensiunile lor transversale, solicitate la compresiune centrică, se încovoaie cu mult înainte ca în secțiunile acestora să apară tensiunile limită σ_c sau σ_r ce corespund distrugerii prin strivire. Acest fenomen fizic poartă denumirea de *flambaj*. Trecerea barei din formă de echilibru dreaptă, în formă curbă corespunde pierderii capacității ei portante nu datorită atingerii limitelor de rezistență a materialelor (σ_c, σ_r), ci datorită *pierderii stabilității* formei inițiale. Cauzele acestui fenomen sunt multiple. Dintre cele mai importante se pot menționa:

- forțele P de compresiune nu sunt aplicate perfect centric;
- axa barei considerată o linie dreaptă poate prezenta mici devieri de la această formă;
- materialul din componența barei, considerat perfect omogen, poate prezenta abateri de la modelul ideal conducând la devieri ale liniei centrelor de masă, în raport cu axa gemeotrică a corpului.

Cauzele menționate conduc la mici excentricități între suportul forței P și centrele de greutate ale secțiunilor transversale ale barelor, datorită cărora, pe lângă efortul axia N în bară ia naștere și un moment încovoietor M, al cărui efect este de încovoiere.

Excentricitățile menționate fiind foarte mici, la valori mici a forței P, momentele încovoietoare menționate sunt reduse iar efectul lor neglijabil. Pe măsura creșterii forței P, cresc momentele M și deformațiile de încovoiere (săgețile) produse de ele, care adăugându-se la excentricitățile inițiale, măresc și mai mult brațul de pârghie al forței P, producând o creștere rapidă a momentului M, până la valoarea de rupere a barei.

Pentru ca acest lucru să nu aibă loc, este necesar ca forța P să fie limitată stadiului în care deformațiile barei din încovoiere sunt neglijabile (nesesizabile), astfel încât bara să rămână în forma inițială dreaptă.

Valoarea forței P pentru care echilibrul barei este posibil, atât în forma dreaptă cât și pe cea curbă, poartă denumirea de sarcină critică de flambaj, notată cu P_{cr}. Având definită această mărime, condiția ca o bară comprimată să nu-și piardă forma inițială de echilibru (deci să nu flambeze) se va exprima prin relația evidentă

$$P_{max} < P_{cr} \qquad (17.1)$$

17.2 DETERMINAREA SARCINII CRITICE DE FLAMBAJ. FORMULA LUI EULER

Așa cum s-a văzut în aliniatul precedent, producerea fenomenului de flambaj este în directă legătură cu apariția și dezvoltarea deformațiilor barei prin încovoiere. Aceste deformații (vezi cap. 12) depind de reazemele (legăturile) barei, în consecință, la rândul lor, sarcinile critice de flambaj P_{cr}, vor depinde și ele de modul de fixare a barei. Sub acest aspect, în domeniul construcțiilor sunt întâlnite:

a) bare dublu articulate;

b) bare încastrate la un capăt și articulate la capătul opus;

c) bare încastrate la un capăt și libere la capătul opus;

d) bare dublu încastrate.

Pentru determinarea sarcinilor critice de flambaj ale acestora, se admit următoarele ipoteze:

- flambajul barei se produce în domeniul elastic de solicitare;
- se neglijează scurtarea barei prin compresiune;
- ecuația diferențială a axei deformate a barei prin flambaj are forma ecuației diferențiale a barei încovoiate $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$;
- se neglijează efectul deformațiilor din forțe tăietoare.

Având în vedere cele arătate mai sus, bara dublu articulată OA, având lungimea ℓ, aria secțiunii transversale A și modulul de elasticitate E, încărcată cu forța axială P, va avea forma deformată (flambată), curba indicată punctat în figura (17.1).

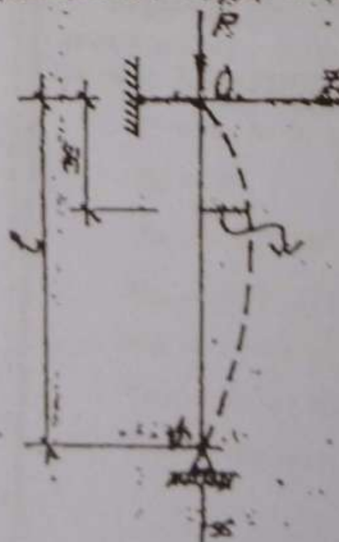


Fig. 17.1

Alegând sistemul de referință cu axa x veritcală și axa z orizontală și notând cu w deplasarea pe orizontală în secțiunea x, ecuația diferențială a axei deformate a barei devine

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}, \qquad (17.2)$$

în care $M(x) = P \cdot w$ reprezintă momentul încovoietor calculat pe axa deformată. Înlocuind expresia acestuia în ecuația (17.2) se obține:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-P \cdot w}{EI}$$, care se mai scrie

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{EI} w = 0 \quad (17.3)$$

Notând

$$\frac{P}{EI} = \alpha^2 \quad (17.4)$$

ecuaţia (17.3) ia forma

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0 \quad (17.5)$$

şi reprezintă o ecuaţie diferenţială liniară omogenă, cu coeficienţi constanţi, de ordinul doi a cărei soluţie are forma generală

$$w = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x \quad (17.6)$$

în care C_1 şi C_2 sunt constante de integrare ce se determină din condiţii limită privitoare la modul de fixare a capetelor barei. În cazul studiat, capetele O şi A fiind articulate, deplasările w din acestea vor fi zero, în consecinţă vom avea următoarele două condiţii la limită:

a) $x = 0$; $w_0 = 0$, care înlocuită în ecuaţia (17.6) conduce la relaţia $0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$, din care rezultă $C_1 = 0$.

b) $x = \ell$; $w_A = 0$. Înlocuind această valoare în relaţia (17.6) se obţine $0 = 0 + C_2 \sin\alpha\ell = 0$, din care rezultă ecuaţia

$$C_2 \sin\alpha\ell = 0 \quad (17.7)$$

ce are două soluţii: $C_2 = 0$ şi $\sin\alpha\ell = 0$. Prima dintre ele se exclude, întrucât pentru $C_2 = 0$, ecuaţia (17.6) se reduce la $w = 0$, ceea ce ar

însemna că nu există flambaj, deformaţiile w fiind nule pe toată lungimea barei.

Cum bara este deformată, rezultă că $C_2 \neq 0$, iar

$$\sin\alpha\ell = 0 \quad (17.8)$$

Ecuaţia (17.8) are o infinitate de soluţii

$$\alpha\ell = k\pi, \; k = 0,1,2,3\ldots \quad (17.9)$$

punând în evidenţă existenţa unei infinităţi de valori a forţei P ce conduc la flambajul barei.

Întrucât P_{cr} este reprezentată de cea mai mică forţă ce conduce la flambajul barei, corespunzător acesteia, din soluţiile (17.9) vom reţine soluţia minimă $\alpha\ell = \pi$, din care $\alpha = \frac{\pi}{\ell}$. Înlocuind această valoare în relaţia (17.4), se obţine $\frac{P_{cr}}{EI} = \frac{\pi^2}{\ell^2}$, şi apoi

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (17.10)$$

Relaţia (17.10) poartă denumirea de formula lui Euler, după numele autorului care a stabilit-o în anul 1744.

Dacă bara este încastrată la un capăt şi articulată la capătul opus, flambajul acesteia se produce ca în figura 17.2,a. Forţa critică de flambaj, dedusă printr-un calcul similar cu cel folosit la bara dublu articulată are expresia:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7\ell)^2} \quad (17.11)$$

Barele încastrate la un capăt şi libere la capătul opus (fig. 17.2,c) şi cele dublu încastrate (fig. 17.2,b), prin flambaj iau formele marcate punctat în figurile indicate.

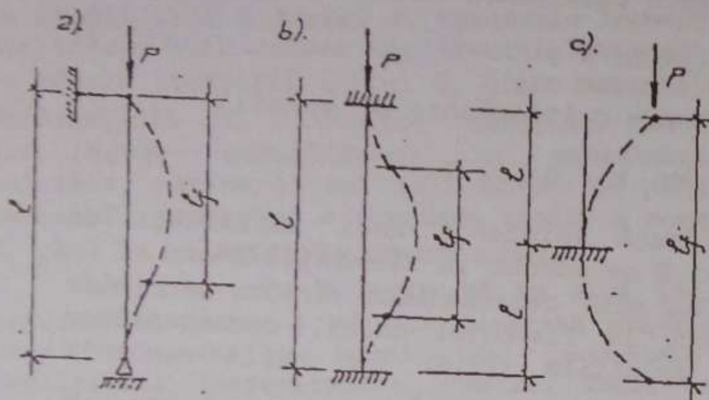


Fig. 17.2

Sarcinile critice de flambaj corespunzătoare acestora, se deduc similar deducerii sarcinii critice P_{cr} la bara dublu articulată şi au valorile

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} \tag{17.12}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5\ell)^2} \tag{17.13}$$

Analizând expresiile forţelor critice de flambaj P_{cr}, pentru cele patru moduri de rezemare a barelor se constată că acestea pot fi sintetizate într-o singură relaţie

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} \tag{17.14}$$

în care l_f poartă denumirea de lungime de flambaj şi are semnificaţia geometrică de lungime a barei, cuprinse între două puncte de inflexiune ale axei deformate (fig. 17.2). Valorile acesteia, rezultă din compararea relaţiei (17.14) cu relaţiile (17.10), (17.11), (17.12), (17.13):

- $\ell_f = \ell$ - pentru bara dublu articulată;
- $\ell_f = 0,7\ell$ - pentru bara încastrată la un capăt şi articulată la capătul opus;
- $\ell_f = 2\ell$ - pentru bara încastrată la un capăt şi liberă la capătul opus;
- $\ell_f = 0,5\ell$ - pentru bara dublu încastrată.

Momentul de inerţie I ce intră în expresiile forţei critice P_{cr} reprezintă momentul de inerţie minim al secţiunii transversale, bara pierzându-şi stabilitatea pe direcţia de rigiditate minimă. Având în vedere acest lucru, relaţia (17.14) ia forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\ell_f^2} \tag{17.15}$$

17.3 LIMITA DE VALABILITATE A FORMULEI LUI EULER

Notând cu A aria secţiunii transversale, tensiunile normale produse în aceasta de forţa critică P_{cr}, în baza relaţiei (9.5) au expresia

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{A \cdot \ell_f^2} \tag{17.16}$$

Având în vedere că $I_{min} = A \cdot i_{min}^2$, i_{min} fiind raza de giraţie minimă a secţiunii, relaţia (17.16) devine

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{\ell_f^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\dfrac{\ell_f}{i_{min}}\right)^2} \tag{17.17}$$

Raportul ℓ_f/i_{min} dintre lungimea de flambaj a barei şi raza de giraţie minimă a secţiunii, poartă denumirea de coeficient de zvelteţe sau coeficient de subţirime şi se notează cu λ:

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} \qquad (17.18)$$

Cu aceasta, expresia tensiunilor critice de flambaj (17.17) devine

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (17.19)$$

În consecinţă, tensiunile critice de flambaj depind (sunt funcţii) de coeficientul de zvelteţe λ.

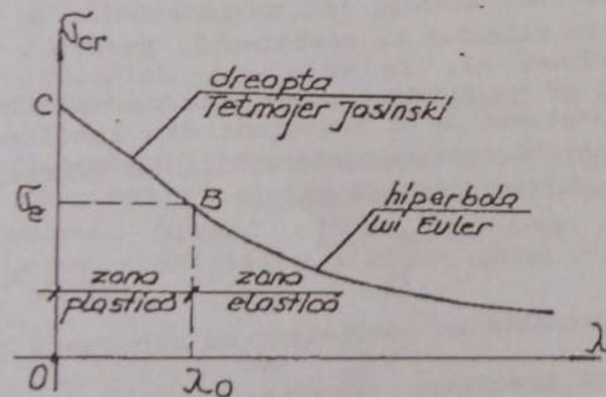


Fig. 17.3

Conform relaţiei (17.19) funcţia $\sigma_{cr}(\lambda)$ este reprezentată printr-o curbă hiperbolică, numită *hiperbola lui Euler* (fig. 17.3). Ea se apropie asimptotic de axa λ, punând în evidenţă că σ_{cr} descreşte şi tinde spre zero, când λ creşte.

Pentru a nu se ajunge la bare cu capacitate critică de flambaj prea mică, care, având coeficienţi de zvelteţe prea mari ar prezenta sensibilitate exagerată la lovituri şi vibraţii, în practica elementelor structurale coeficienţii λ sunt limitaţi la anumite valori maxim admise λ_a ce poartă denumirea de *coeficienţi de zvelteţe admisibili*.

Valorile acestora sunt date în normale tehnice în funcţie de tipul elementului, sistemul strucutral, felul construcţiei etc. Aşa spre exemplu, pentru stâlpii principali, cu inimă plină, realizaţi din oţel la halele industriale λ_a = 120, pentru diagonalele şi montanţii comprimaţi din componenţa fermelor cu zăbrele λ = 150. În consecinţă, elementele structurale comprimate şi întinse centric, pe lângă alte condiţii (rezistenţă, rigiditate etc) vor trebui să îneplinească şi condiţia de zvelteţe, care se exprimă prin relaţia:

$$\lambda \le \lambda_a \qquad (17.20)$$

În Anexa 12 sunt prezentate valorile λ_a pentru câteva elemente structurale solicitate axial din domeniul construcţiilor metalice. Ţinând seama că formula lui Euler a fost stabilită pornind de la ecuaţia fibrei medii deformate $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$, deduse în ipoteza valabilităţii legii lui Hooke, tensiunile σ_{cr} date de relaţia (17.19) trebuie să se găsească numai în domeniul de existenţă al acestei legi, respectiv pe domeniul de elasticitate al materialului, delimitat superior de tensiunea σ_e. În consecinţă, va trebui să avem: $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_e$, din care rezultă $\lambda^2 \ge \frac{\pi^2 E}{\sigma_e}$. Dacă se notează $\lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_e}$

sau $\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$, tensiunile σ_{cr} vor fi inferioare tensiunilor σ_e pentru orice λ care satisface relația

$$\lambda \geq \lambda_0 \qquad (17.21)$$

ce definește deci limita de valabilitate a formulei lui Euler.

Pentru oțelul moale de construcții OL37, cu $E = 2{,}1 \times 10^6$ daN/cm^2 și $\sigma_e = 1900$ daN/cm^2 rezultă $\lambda_0 \cong 105$ iar pentru oțelul OL52 având același modul de elasticitate și $\sigma_e = 2850$ daN/cm^2 se obține $\lambda \cong 85$. Cum pentru $\lambda < \lambda_0$, formula lui Euler conduce la tensiuni $\sigma_{cr} > \sigma_e$, intervalul de la $\lambda = 0$ până la $\lambda = \lambda_0$, de *nevalabilitate* a formulei lui Euler, este numit *zonă plastică*, spre deosebire de zona de valabilitate a formulei, în care $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$ numită *zonă elastică* (fig. 17.3).

Dacă formula lui Euler este valabilă numai pentru domeniul $\lambda \geq \lambda_0$, se pune întrebarea firească: cum se vor calcula la flambaj barele având $\lambda < \lambda_0$, adică în domeniul plastic. Pentru rezolvarea acestei probleme au fost propuse numeroase formule empirice de legătură între σ_{cr} și λ, una din cele mai folosite fiind dată de Tetmayer - Iasinski, sub forma relației liniare

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \qquad (17.22)$$

reprezentate grafic în figura 17.3 prin dreapta BC. Termenii a și b ai relației menționate sunt constante ce se determină experimental pentru fiecare material în parte. Pentru oțelul moale de construcții OL37, acestia au valorile a = 3100 și b = 11,40, astfel că tensiunea critică se va exprima prin relația $\sigma_{cr} = 3100 - 11{,}4\lambda$, în care λ este dat de relația (17.18). Pentru lemn, a = 293; b = 1,94, cu care $\sigma_{cr} = 293 - 1{,}94\ \lambda$.

Rezumând cele arătate mai sus, vom reține deci că tensiunile critice de flambaj σ_{cr} se obțin cu formula lui Euler (17.19) în domeniul $\lambda_a > \lambda \geq \lambda_0$ și din formulele Tetmaer-Iasisnki (17.22) pe domeniul $0 < \lambda < \lambda_0$ (vezi fig. 17.3).

17.4 CALCULUL PRACTIC AL BARELOR LA FLAMBAJ

Tensiunile critice de flambaj σ_{cr} sunt mărimi limită la care bara cedează prin flambaj.

Ele joacă deci același rol cu tensiunile σ_c și σ_r utilizate în calculul de rezistență. Pentru a se avea certitudinea că, în cele mai defavorabile situații bara nu va flamba, tensiunile normale din aceasta se limitează la o fracțiune din tensiunea critică σ_{cr}, numită tensiune admisibilă la flambaj, notată cu σ_{af}, definită prin raportul

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{C_f} \qquad (17.23)$$

în care C_f reprezintă un coeficient de siguranță la flambaj.

Cu această precizare, condiția de *stabilitate* a barei se va exprima prin relația

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{af} \qquad (17.24)$$

Rezultând din împărțirea tensiunii critice σ_{cr} printr-o constantă c_f este evident că σ_{af} variază, ca și σ_{cr} în funcție de λ. Ea reprezintă o caracteristică de calcul la flambaj care se exprimă uzual prin intermediul rezistenței de calcul a materialului R și a unui coeficient $\varphi(\lambda)$, numit coeficient de flambaj, prin expresia:

$$\sigma_{af} = \varphi(\lambda)\cdot R = \varphi R \qquad (17.25)$$

Valoarea coeficientului $\varphi(\lambda)$ este întotdeauna subunitară ($\varphi \le 1$), motiv pentru care acesta se mai numeşte şi *coeficient de reducere la flambaj*, el depinzând de materialul din care este alcătuită bara şi de coeficientul ei de zvelteţe λ. Pentru principalele materiale de construcţii, coeficienţii φ sunt daţi în normele tehnice sub formă de tabele, funcţie de diferite valori ale coeficientului de zvelteţe λ (Anexa 14).

Având în vedere relaţiile (17.24) şi (17.25), condiţia ce asigură stabilitatea barei se va exprima prin relaţia:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le \varphi R \qquad (17.26)$$

Împărţită cu φ, aceasta ia forma: $\frac{\sigma}{\varphi} = \frac{N}{\varphi A} \le R$,

în care raportul σ/φ defineşte tensiunea normală maximă ce poate fi admisă în bară, fără ca aceasta să flambeze. Notând cu σ_{max} valoarea acesteia, condiţia de stabilitate a barei, dată de relaţia (17.26) devine

$$\sigma_{max} = \frac{N}{\varphi A} \le R \qquad (17.27)$$

Observând că forma acesteia este aceeaşi cu aceea a condiţiei de rezistenţă (9.7), rezultă că toate calculele de stabilitate la flambaj se vor efectua ca şi în cazul compresiunii simple (fără flambaj), luând însă în locul ariei A, produsul φA.

Conţinutul problemelor rezistenţei materialelor privind calculul la flambaj este cel întâlnit la toate celelalte solicitări simple sau compuse iar rezolvarea lor se face pe baza relaţiei (17.27).

Fiind dată o bară, supusă la compresiune de o forţă axială P, de lungime ℓ şi secţiune transversală A, realizată dintr-un material având rezistenţa de calcul R, *verificarea acesteia* la compresiune cu flambaj revine la testarea satisfacerii inegalităţii (17.27). Pentru aceasta se calculează în prealabil lungimea de flambaj ℓ_f în funcţie de modul de fixare a capetelor barei şi coeficientul de zvelteţe λ dat de relaţia (17.18), în care $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$; $I_{min} = \min[I_y, I_z]$. Cu λ astfel obţinut, din anexa 14 rezultă coeficientul de reducere la flambaj φ.

La limită, inegalitatea (17.27) defineşte ecuaţia

$$\frac{N}{\varphi A} = R \qquad (17.28)$$

din care se deduce:

a) Formula pentru dimensionare la flambaj

$$A_{nec} = \frac{N}{\varphi R} \qquad (17.29)$$

Pentru aplicarea acesteia se calculează efortul axial N în funcţie de încărcarea exterioară P şi se alege materialul din care se va realiza bara, în baza căruia rezultă rezistenţa de calcul R.

Coeficientul de reducere la flambaj φ este funcţie de aria secţiunii care, la dimensionare este necunoscută. Pentru aceasta, dimensionarea la compresiune cu flambaj se efectuează în unul din următoarele moduri:

a1) *Prin încercări*

Folosind Anexa 12 se alege un coeficient de zvelteţe $\lambda \le \lambda_a$ în raport de care din anexa 14 se scoate coeficientul φ.

Apoi cu relaţia (17.29) se calculează A_{nec} şi se alcătuieşte secţiunea ca formă şi dimensiuni după care se verifică cu relaţia (17.27).

Dacă această inegalitate nu se verifică sau dacă diferenţa $R-\sigma_{max}$ este mare, conducând la o soluţie neeconomicoasă, secţiunea se modifică în sens corespunzător şi se reverifică folosind aceeaşi relaţie. Efectuând câteva "tatonări" succesive, se ajunge la soluţia căutată.

a2) *Utilizând metoda coeficientului* ξ

Se calculează un coeficient dat de relaţia

$$\xi = \ell_f \sqrt{\frac{kR}{P}} \qquad (17.30)$$

în care ℓ_f reprezintă lungimea de flambaj a barei (Anexa 15) iar k o caracteristică a secţiunii ($k = A^2/I$) dată în Anexa 13.

Având valoarea ξ, din Anexa 14 se obţine coeficientul de reducere la flambaj φ.

În continuare, algoritmul de calcul pentru dimesnionarea secţiunii este cel folosit la punctul a_1, după obţinerea coeficientului de flambaj φ.

b) *Formula pentru calculul capacităţii portante la compresiune cu flambaj*

$$N_{cap} = \varphi \cdot A \cdot R \qquad (17.31)$$

în care φ se calculează după algoritmul folosit în calculul de verificare la flambaj cu relaţia (17.27).

Observaţii

1) Slăbirile locale influenţează nesemnificativ mărimea forţei critice de pierdere a stabilităţii barei, motiv pentru care în calculul la flambaj prezentat mai sus, aria A va avea semnificaţia de arie brută. Dacă slăbirea este mai importantă, suplimentar devine necesar a se face o verificare de

rezistenţă la compresiune centrică, în secţiunea slăbită, cu relaţia (9.12).

2) Fenomenul de pierdere a stabilităţii, studiat mai sus pentru bara dreaptă este întâlnit şi în cazul altor structuri: bare curbe şi arce, grinzi de secţiuni puţin rigide la încovoiere laterală (flambaj lateral), plăci curbe subţiri etc. În cazul plăcilor plane comprimate, fenomenul de pierdere a stabilităţii poartă denumirea de **voalare**.

17.5 FLAMBAJUL BARELOR DE SECŢIUNE COMPUSĂ

Dacă forţa de compresiune transmisă unei bare este mare, secţiunea acesteia se alcătuieşte din două sau mai multe profile legate între ele prin *elemente de solidarizare*, dispuse la anumite distanţe cu rol de asigurare a conlucrării şi comportării secţiunilor ca un tot unitar. În figura 17.4 sunt indicate câteva moduri posibile de alcătuire, întâlnite în domeniul construcţiilor metalice.

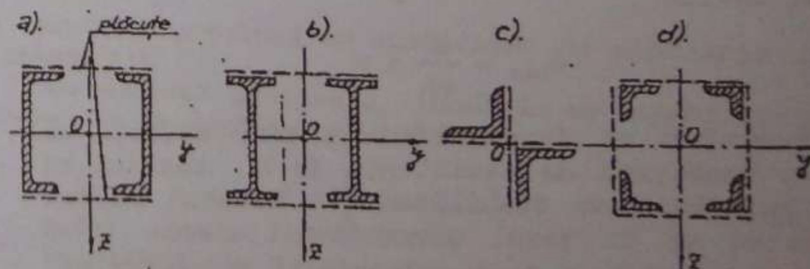


Fig. 17.4

Axele principale de inerţie se numesc materiale şi imateriale după cum acestea intersectează sau nu materialul secţiunii profilului.

Secţiunile indicate în figurile 7.4,a şi b au câte o axa materială (Oy) şi una imaterială (Oz), iar secţiunile din figurile 17.4,c şi d au ambele axe

principale imateriale. Solidarizarea elementelor componente ale secțiunii poate fi realizată cu plăcuțe (fig. 17.5,a) sau cu zăbreluțe (fig. 17.5,b).

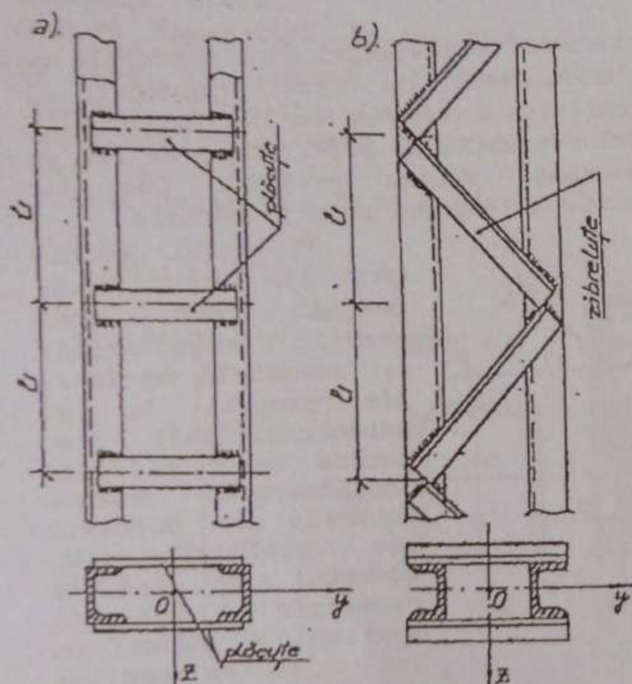


Fig. 17.5

Tensiunile critice σ_{cr} de pierdere a stabilității unei astfel de bare în raport cu axa materială sunt cele date de relația (17.19).

În raport cu axa imaterială, calculul acestora este diferit și se face cu relația

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\lambda_{tr}} \qquad (17.32)$$

în care λ_{tr} poartă denumirea de *coeficient de zveltețe transformat*.

Valoarea acestuia este dată de relația

$$\lambda_{tr} = \sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_1^2} \qquad (17.33)$$

în care λ_z reprezintă coeficientul de zveltețe al barei în raport cu axa imaterială Oz: $\lambda_z = \frac{\ell_f}{i_z}$, în care $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$, iar ℓ_f este lungimea de flambaj a barei pe direcția Oxy (se va observa că flambajul în raport cu axa materială se produce pe direcția z iar cel în raport cu axa imaterială oz pe direcția y).

Coeficientul de zveltețe λ_1 se referă la pierderea stabilității unui singur element al secțiunii pe lungimea ℓ_1 (fig. 17.5). În cazul solidarizării cu plăcuțe $\lambda_1 = \frac{\ell_1}{i_1}$; ℓ_1 fiind distanța dintre axele a două plăcuțe consecutive iar i_1 raza de girație minimă a secțiunii transversale a unui singur profil, selectată din tabelul profilelor laminate.

Din considerente constructive, normele tehnice impun valoarea

$$\lambda_1 = \frac{\ell_1}{i_1} \le 40 \qquad (17.34)$$

Condiția de stabilitate a unei bare de secțiune compusă, se exprimă prin relația (17.27) în care A reprezintă suma ariilor tuturor profilelor din alcătuirea secțiunii compuse, iar φ se obține din Anexa 14 în funcție de λ, definit ca valoare maximă între λ_y și λ_{tr} [$\lambda = \max(\lambda_y, \lambda_{tr})$].

Remarcăm astfel că problema calculului de verificare și de stabilire a capacității portante la barele comprimate cu secțiune compusă diferă de cel

al barelor cu două axe materiale numai prin modul de stabilire a coeficientului φ şi al ariei A.

Privitor la problema *dimensionării*, aceasta este puţin diferită, având ca obiect stabilirea mărimii profilelor, a distanţei dintre acestea şi dintre plăcuţe.

Urmare a acestui fapt, calculul se efectuează în două etape. În prima din ele se stabileşte mărimea profilelor printr-un calcul în raport cu axa materială care se face cu totul identic cu cel prezentat în aliniatul 17.4.

Odată mărimea profilelor stabilită, distanţa dintre ele se determină din condiţia ca bara să aibă aceeaşi capacitate portantă în raport cu ambele axe (materială şi imaterială) ceea ce revine la condiţia

$$\lambda_y = \lambda_{tr} \qquad (17.35)$$

Înlocuindu-l pe λ_{tr} din această relaţie cu expresia acestuia dată de (17.33), succesiv se obţine: $\lambda_y = \sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_1^2}$; $\lambda_y^2 = \lambda_z^2 + \lambda_1^2$.

Din ultima relaţie se calculează

$$\lambda_{z,nec} = \sqrt{\lambda_y^2 - \lambda_1^2} \qquad (17.36)$$

Dacă lungimea ℓ_1 nu este dată, ea se alege pe baza relaţiei (17.34) din inegalitatea $\ell_1 \leq 40 i_1$.

Având în vedere că $\lambda_{z,nec} = \dfrac{\ell_{fz}}{i_{z,nec}}$, se calculează $i_{z,nec} = \dfrac{\ell_{fz}}{\lambda_{z,nec}}$ şi apoi

$$I_{z,nec} = i_{z,nec}^2 A = A\left(\frac{\ell_{fz}}{\lambda_{z,nec}}\right)^2 \qquad (17.37)$$

Pentru determinarea distanţei dintre profile se egalează $I_{z,nec}$ cu momentul de inerţie geoemtric al secţiunii I_z, calculat în raport cu axa imaterială. Se obţine astfel o ecuaţie de gradul doi, ce are ca necunoscută distanţa dintre profile. Una din rădăcinile acestuia va exprima soluţia căutată.

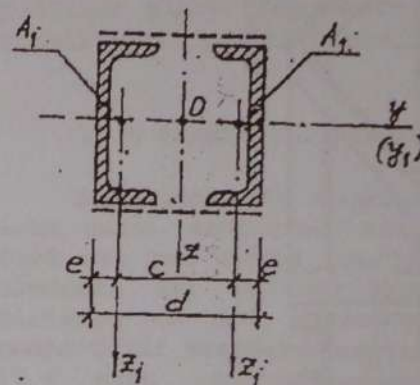


Fig. 17.6

În cazul secţiunii din figura 17.6, compuse din două profile U având ariile A_1, momentele de inerţie proprii I_{z1} şi excentricităţile e, notând cu c distanţa (necunoscută) dintre centrele de greutate ale profilelor U, momentul de inerţie geometric al întregii secţiuni în raport cu axa z se va exprima sub forma:

$$I_z = 2\left[I_{z1} + A_1 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

Punând condiţia $I_z = I_{z,nec}$ se obţine ecuaţia de gradul doi în c, $2\left[I_{z1} + A_1 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = I_{z,nec}$. Reţinând soluţia ce corespunde problemei se obţine distanţa c şi apoi cea dintre feţele laterale ale inimilor, mai uşor de măsurat, $d = c + 2e$.

17.6 EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 17.6.1

O bară încastrată la un capăt şi liberă la capătul opus, de lungime ℓ = 2m şi alcătuită din două profile U_{18} alăturate şi sudate între ele, este încărcată cu o forţă centrică de compresiune P = 840 kN (fig. 17.7). Se cere verificarea stabilităţii barei (R = 2100 daN/cm²).

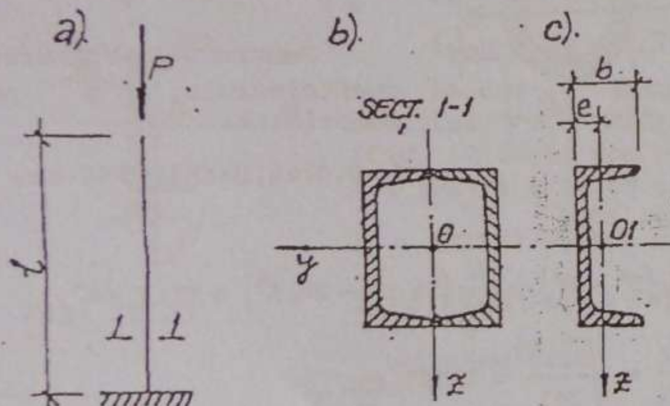


Fig. 17.7

Rezolvare

Pentru verificare se foloseşte relaţia (17.27); N = P = 840kN. Caracteristicile geometrice ale profilului U_{18}, extrase din Anexa 4 sunt: A_1 = 28cm²; I_{y1} = 1350cm⁴, I_z = 114 cm⁴, e = 1,92 cm, b = 70 mm. Pentru secţiunea transversală a barei (fig. 17.7,b) vom avea:

$$A = 2\times 28 = 56\ cm^2;$$

$$I_y = 2\times 1350 = 2700\ cm^4;$$

$$I_z = 2\left[114 + 28(b - e)^2\right] = 1673 cm^4\ cm;\quad I_{min} = I_z;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 5,466\,cm$$

Lungimea de flambaj a barei, corespunzătoare rezemărilor acesteia este ℓ_f = 2ℓ = 4m = 400 cm. Cu aceasta: $\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{400}{5,466} = 73$.

Din anexa 14 se obţine φ = 0,743.

Înlocuind elementele determinate mai sus în relaţia (17.27) se obţine

$$\sigma_{max} = \frac{84000}{0,743\times 56} = 2019\,\frac{daN}{cm^2} < R$$

Prin urmare, stabilitatea barei este asigurată.

Exemplul 17.6.2

Se cere să se dimensioneze un stâlp încastrat la un capăt şi articulat la capătul opus, de lungime ℓ = 4m, încărcat cu o forţă centrică P = 800 kN (fig. 17.8). Se dă R = 2100 daN/cm².

Rezolvare

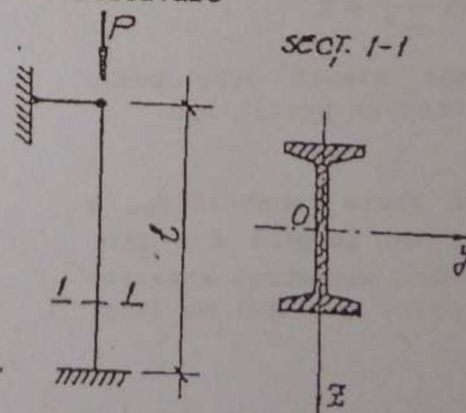


Fig. 17.8

Se utilizează metoda coeficientului ξ. În acest scop, din Anexa 13, se determină k = 9,65 iar pe baza datelor problemei se stabilesc:

ℓ_f = 0,7ℓ = 0,7×400 = 280 cm;

N = P = 800 kN = 80000 daN şi

$R = 2100\ daN/cm^2$

Folosind relaţia (17.30) vom avea:

$$\xi = 280\sqrt{\frac{9,65 \times 2100}{80000}} = 140,924 = 141$$

Din anexa 14 corespunzător valorii ξ astfel determinate rezultă $\varphi = 0,573$. Pentru dimensionare se utilizează relaţia (17.29)

$$A_{nec} = \frac{80000}{0,573 \times 2100} = 66,484\ cm^2$$

Corespunzător acestei arii, din Anexa 5 rezultă un profil I_{30} având: $A = 69,10\ cm^2$; $i_{min}=i_z=2,56$ cm. Pentru verificarea profilului ales, se calculează

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{280}{2,56} = 109$$

şi apoi, din Anexa 14 se scoate $\varphi = 0,553$. Folosind relaţia (17.27) vom avea:

$$\sigma_{max} = \frac{80000}{0,553 \cdot 69,10} = 2094\ \frac{daN}{cm^2} < R$$

În consecinţă, secţiunea aleasă este bună, bara urmând a fi realizată dintr-un profil I_{30}.

Exemplul 17.6.3

Se cere să se determine forţa capabilă P_{cap} a unui stâlp, dublu încastrat, de lungime ℓ = 15m, realizat din ţeavă de oţel având diametrul exterior D = 245 mm şi diametrul interior d = 205 mm (fig. 17.9).

Rezolvare

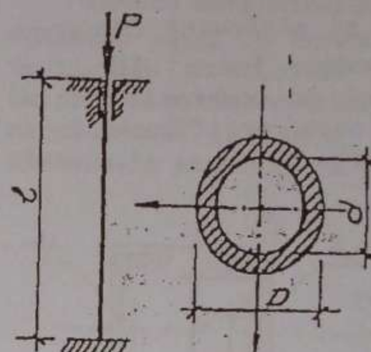


Fig. 17.9

Se utilizează relaţia (17.31) în care

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(24,5^2 - 20,5^2\right) = 141 cm^2$$

Pentru obţinerea coeficientului φ se calculează:

$\ell_f=0,5\ell=0,5\times1500=750$ cm;

$$I = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(24,5^4 - 20,5^4\right) = 9017\ cm^4;$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{9017}{141}} = 7,997\ cm;$$

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i} = \frac{750}{7,997} = 93,786 = 94$$

Din Anexa 14 se obţine $\varphi = 0,660$, cu care

$N_{cap} = \varphi AR = 0,660\times144\times2100 = 1954,26\times10^2$ daN ≡ 1954 kN.

Exemplul 17.6.4

Un stâlp metalic dublu articulat de lungime ℓ = 7m, este alcătuit din două profile U_{22} distanţate la 15 cm unul de celălalt şi solidarizate cu plăcuţe (fig. 17.10). Se cere să se verifice dacă stâlpul poate fi încărcat cu o forţă centrică de compresiune P = 1000 kN.

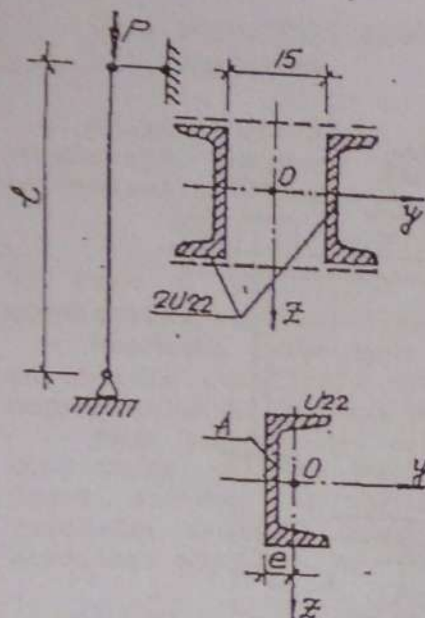


Fig. 17.10

Rezolvare

Din anexa 4 se extrag caracteristicile geometrice ale profilului U_{22}:

$A = 37,4\ cm^2$;

$e = 2,14\ cm$;

$I_y = 2690\ cm^4$;

$I_z = 197\ cm^4$;

$i_{1,min} = i_z = 2,30\ cm$

Pentru întreaga secțiune a stâlpului (fig. 17.10,b) vom avea:

$A = 2 \times 37,4 = 74,80\ cm^2$

$I_y = 2 \times 2690 = 5380\ cm^4$

$$I_z = 2\left[197 + 37,4\,(7,5 + e)^2\right] = = 7345\,cm^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 8,481\ cm; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 9,91\ cm$$

Lungimii lui de flambaj $\ell_f = = 700$ cm, în raport cu axele Oy și Oz, îi vor corespunde următorii coeficienți de zveltețe:

$$\lambda_y = \frac{\ell_f}{i_y} = \frac{700}{8,481} = 82,537 \cong 83$$

$$\lambda_z = \frac{\ell_f}{i_z} = \frac{700}{9,910} = 70,636 \cong 71$$

Distanța ℓ_1 dintre plăcuțe nefiind dată, se va calcula în baza relației (17.34):

$$\ell_1 \le 40 i_{1,min} = 40 \times 2,30 = 92\ cm$$

Adoptând $\ell_1 = \frac{\ell}{8} = \frac{700}{8} = 87,50\,cm < 40 i_{1,min} = 92\ cm$ (lungimea stâlpului s-a divizat într-un număr întreg de panouri), vom avea

$$\lambda_1 = \frac{\ell_1}{i_1} = \frac{87,5}{2,30} = 38$$

$$\lambda_{tr} = \sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_1^2} = \sqrt{71^2 + 38^2} = 80,530 \cong 81$$

Pe baza valorilor de mai sus se deduce $\lambda_{max} = \lambda_y = 83$ pentru care, din Anexa 14 rezultă $\varphi = 0.673$. Folosind relația (17.27) vom avea:

$$\sigma_{max} = \frac{100000}{0,673 \cdot 74,80} = 1986\ \frac{daN}{cm^2} < R$$

În concluzie, bara poate fi încărcată cu P = 1000 kN fără să-și piardă capacitatea portantă prin flambaj.

CAPITOLUL 18

SOLICITĂRI DINAMICE

18.1 GENERALITĂŢI

În toate problemele de tensiuni şi deformaţii studiate în capitolele precedente, acţiunea forţelor a fost considerată *statică*, adică crescând lent şi continuu de la valoarea zero la valoarea finală. Ca urmare a vitezelor reduse şi uniforme de creştere a intensităţii forţelor, acceleraţiile imprimate de acestea corpurilor solicitate sunt practic neglijabile.

În numeroase alte cazuri, forţele ce solicită construcţiile sau elementele de cosntrucţie, pe timpul duratei lor de aplicare sau acţiune îşi modifică rapid modulul, direcţia şi sensul, imprimând corpurilor solicitate acceleraţii *a*.

Asemenea acţiuni mecanice se numesc generic *dinamice* iar forţele care le produc, *forţe dinamice*. În figura (18.1,a) este arătată acţiunea unei maşini (având organe în mişcare) asupra unei grinzi, iar în figura (18.1,b) căderea unui corp pe un element structural.

Acţiunea vântului ce suflă în rafale şi acţiunea cutremurelor de pământ asupra construcţiilor (fig. 18.1,c) sunt încărcări dinamice cu frecvenţe deosebit de importante pentru construcţii. Tot în categoria acestora pot fi menţionate acţiunile valurilor mării asupra digurilor (fig. 18.1,d), avalanşele de zăpadă şi alunecările de teren, inundaţiile, baterea piloţilor, izbirea accidentală a unor vehicule etc.

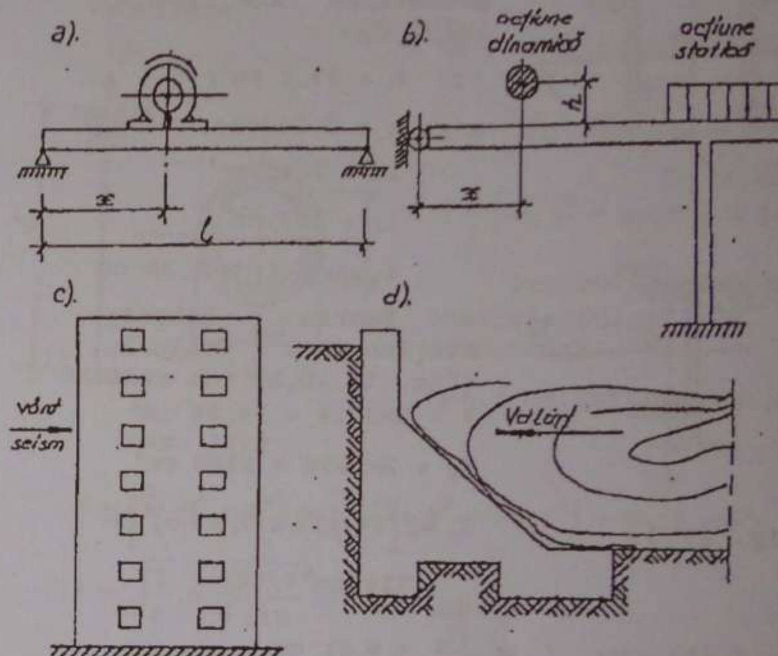


Fig. 18.1

Acţiunea dinamică a încărcărilor asupra construcţiilor este un fenomen deosebit de complex, neelucidat complet nici până în prezent, amplificat în bună parte şi de comportarea materialelor din componenţa elementelor structurale al căror răspuns la acţiunile dinamice este mult diferit faţă de cel la acţiuni statice.

După modul de variaţie al acceleraţiilor, acţiunile dinamice asupra construcţiilor pot fi:

- solicitări dinamice cu acceleraţie constantă în modul şi direcţie;
- solicitări dinamice prin şoc;
- solicitări dinamice cu acceleraţie variabilă în timp, de regulă periodică (numite şi vibraţii).

18.2 SOLICITĂRI DINAMICE CU ACCELERAȚIE CONSTANTĂ

Asupra oricărui corp aflat în mișcare accelerată, în baza principiului lui d'Alembert acționează și o forță de inerție dată de relația

$$F_i = m \cdot a \tag{18.1}$$

în care m reprezintă masa corpului, iar a - accelerația mișcării acestuia.

Asemenea forțe apar la toate corpurile aflate în mișcare curbilinie sau rectilinie neunitară, la care accelerațiile sunt diferite de zero.

Dacă asupra unui astfel de corp acționează și alte forțe, acestea împreună cu cele de inerție vor forma sisteme în *echilibrul dinamic* ce permit rezolvări analoage celor efectuate pe sistemele în echilibru static.

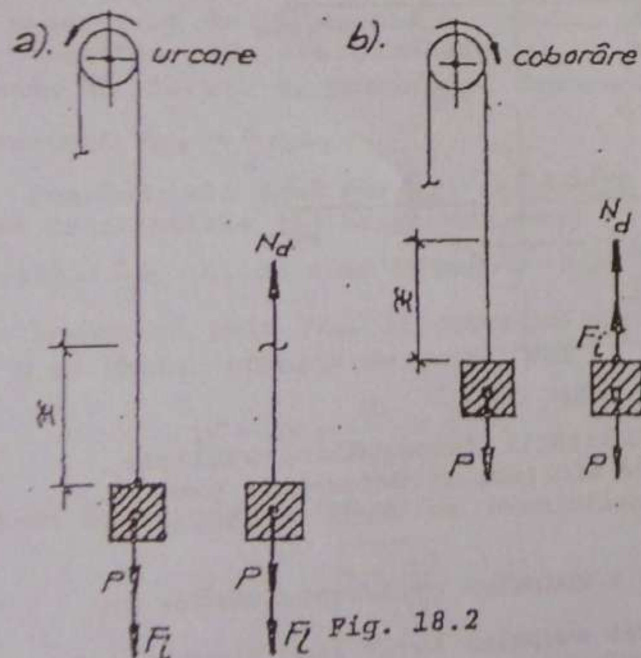


Fig. 18.2

Pentru ilustrare vom urmări în continuare modul de calcul al unui cablu de ascensor sau de macara ce poartă (ridică și coboară) cu accelerație constantă a greutatea P (fig. 18.2).

Forțele de inerție, așa cum se cunoaște din fizică, au sensul invers sensului mișcării corpului, în consecință, atunci când acesta va urca, sensul lor va fi de sus în jos (fig. 18.2,a) iar la coborâre, de jos în sus (fig. 18.2,b)

Neglijând greutatea proprie a cablului de tracțiune, acțiunea forței P asupra acestuia va fi una dinamică, însoțită de prezența forței de inerție F_i, date de relația (18.1).

Secționând cablul și notând cu N_d efortul axial din acesta, asupra corpului în mișcare vor acționa forțele N_d, greutatea lui proprie P și forța de inerție F_i (fig. 18.2).

Exprimându-le echilibrul printr-o ecuație de proiecție pe direcția cablului (verticală) se obține:

- *la urcare* (fig. 18.2,a)

$-N_d + P + F_i = 0$, din care rezultă:

$$N_d = P + F_i = P + m \cdot a = \\ = P + \frac{P}{g}a = P\left(1 + \frac{a}{g}\right) = \psi P. \tag{18.2}$$

Termenul

$$\psi = 1 + \frac{a}{g} \tag{18.3}$$

poartă denumirea de *coeficient dinamic*. Dacă cabina ascensorului sau greutatea ridicată de macara este oprită într-o poziție x, acțiunea forței P asupra cablului va fi una statică, ce produce un efort axial

$$N_{st} = P \quad (18.4)$$

Comparând relațiile (18.2) cu (18.4) rezultă

$$N_d = \psi N_{st} \quad (18.5)$$

Notând aria secțiunii cablului cu A, tensiunile normale produse de acțiunea dinamică și statică a forței P în acesta, vor fi:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{\psi P}{A} \quad (a)$$

$$\sigma_{st} = \frac{N_{st}}{A} = \frac{P}{A} \quad (b)$$

Din cele două relații (a) și (b) rezultă

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} \quad (18.6)$$

• *la coborâre* (fig. 18.2,b)

$-N_d + P - F_i = 0$, din care rezultă

$$N_d = P - F_i = P - m \cdot a = P - \frac{P}{g}a = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) \quad (18.7)$$

Dacă $a = g$, coborârea sarcinii P corespunde căderii libere, pentru care, din relația (18.7) rezultă $N_d = 0$.

Din expresiile relațiilor de mai sus rezultă că efortul N_d și tensiunea σ_d sunt maxime la urcare.

Condiția de rezistență a cablului se va scrie

$$\sigma_{max} = \sigma_d = \psi \sigma_{st} \leq R \quad (18.8)$$

În baza relațiilor (18.5) și (18.6) rezultă că atât eforturile cât și tensiunile din acțiuni dinamice cu accelerație constantă se pot obține din cele produse de acțiunea statică a forței respective prin multiplicare cu coeficientul dinamic ψ.

18.3 SOLICITĂRI DINAMICE PRIN ȘOC

Un element de construcție este solicitat prin șoc atunci când încărcările îi sunt aplicate brusc, cu toată intensitatea.

Cazul cel mai semnificativ în acest sens îl reprezintă căderea unui corp pe alt corp (fig. 18.3).

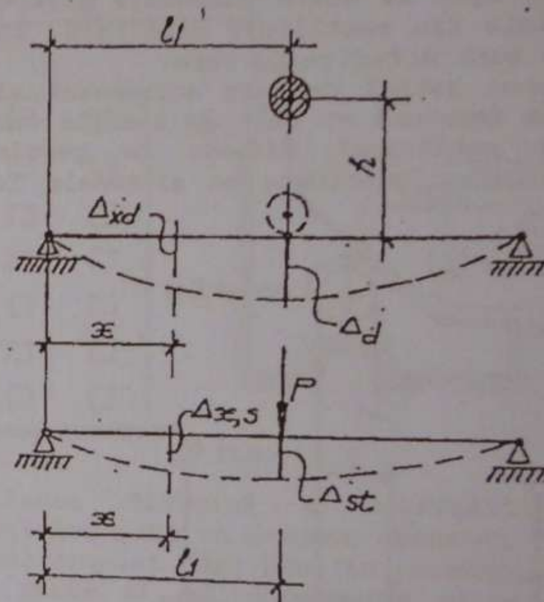


Fig. 18.4

Datorită complexității fenomenelor rezultate, în studiul stării de eforturi și deformații produse de acest tip de solicitare se admit următoarele ipoteze de calcul:

a) Masa $m = \frac{P}{g}$ a corpului ce lovește rămâne în contact intim cu masa corpului lovit (șoc plastic);

b) Se neglijează energia de deformație locală ca urmare a lovirii;

c) Aspectul deformaţiilor corpului lovit este acelaşi ca şi în cazul aplicării statice a forţei.

Pe baza ipotezelor de mai sus, calculul elementelor de construcţie la acţiunea şocului poate fi efectuat analog calculului la forţe statice, amplificând rezultatele obţinute cu multiplicatorul dinamic ψ numit (în acest caz) şi *coeficient de impact*, prin urmare

$$P_d = \psi P_{st} \tag{18.9,a}$$

$$\Delta_d = \Delta_{max} = \psi\ \Delta_{st} \tag{18.9,b}$$

$$\sigma_d = \sigma_{max} = \psi \sigma_{st} \tag{18.9,c}$$

Determinarea coeficientului ψ se face aplicând principiul conservării energiei, admiţând că energia cinetică a corpului ce loveşte $W_c = P(h+\Delta_d)$, din momentul impactului se transformă integral în energie potenţială de deformaţie a corpului lovit W_{def}.

Valoarea acesteia este aceeaşi cu a lucrului mecanic al forţei P_d parcurgând deplasarea Δ_d; în consecinţă $W_{def} = \frac{1}{2} P_d \Delta_d$.

Egalând cele două energii ($W_c = W_{def}$) şi ţinând seama de relaţiile (18.19,a) vom avea:

$P(h+\Delta d) = \frac{1}{2} P_d \cdot \Delta_d$, de unde $Ph + P \cdot \psi \cdot \Delta_{st} = \frac{1}{2} P\psi \cdot \Delta_{st}\psi$.

Împărţind prin $P\Delta_{st}$ şi ordonând după puterile lui ψ se obţine ecuaţia de gradul doi

$$\psi^2 - 2\psi - \frac{2h}{\Delta_{st}} = 0 \tag{18.20}$$

a cărei soluţie pozitivă este

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \tag{18.21}$$

în care h reprezintă înălţimea de la care cade corpul, iar Δ_{st}, deformarea elementului de construcţie din acţiunea statică a forţei P (fig. 18.3). Din relaţia (18.21, pentru h = 0, rezultă ψ = 2, prin urmare, forţa P aplicată brusc pe un corp are asupra acestuia un efect dinamic.

Observaţii

1. Relaţia (18.21) pune în evidenţă că efectul dinamic materializat prin coeficientul ψ este cu atât mai mare cu cât înălţimea de cădere este mai mare, iar pentru acelaşi h, cu cât elementul lovit este mai rigid (Δ_{st} - mic).

Rezultă deci că influenţa măririi rigidităţii nu este favorabilă. Atunci când $\frac{2h}{\Delta_{st}} > 100$ în calculul coeficientului de impact ψ se admite relaţia simplificată

$$\psi \cong \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}} \tag{18.22}$$

2. Exprimând înălţimea h din legea vitezei $v = \sqrt{2gh}$ la căderea liberă a corpurilor cunoscută din Fizică se obţine $h = \frac{v^2}{2g}$, care înlocuită în relaţia (18.21) permite exprimarea coeficientului dinamic în funcţie de viteza corpului ce loveşte

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \tag{18.23}$$

18.4 CALCULE DE REZISTENȚĂ LA SOLICITĂRILE DINAMICE

Așa cum s-a văzut paragrafele (18.2) și (18.3) acțiunile dinamice ale forțelor conduc la tensiuni superioare celor rezultate din acțiunea statică a forțelor respective. Ca urmare a acestui fapt, condiția de rezistență a unui element de construcție solicitat dinamic se va exprima prin relația

$$\sigma_d = \sigma_{max} = \psi\sigma_{st} \le R \tag{18.24}$$

Problemele calculului de rezistență a barelor astfel solicitate pot fi de verificare, dimensionare și de stabilire a capacității lor portante. Ca și în cazul altor solicitări simple sau compuse, ele se rezolvă pornind de la condiția de rezistență. Pentru o bară dată ca secțiune (A); lungime (ℓ) și încărcare dinamică (h, P), termenii acesteia pot fi calculați cu relațiile precizate în paragrafele 18.2 și 18.3, astfel că *verificarea și capacitatea* portantă a barei se pot obține relativ simplu.

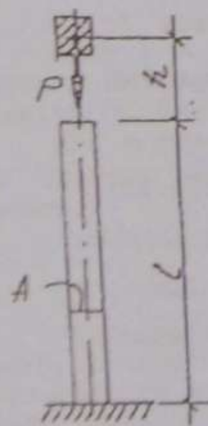


Fig. 18.4

Situația este cu totul diferită în cazul *dimensionării* barelor solicitate prin șoc, la care, pentru o alcătuire rațională, este necesar a fi cunoscut volumul acestora V, de care este legată capacitatea barei de înmagazinare a energiei potențiale de deformație W_{def}.

Pentru ilustrare vom urmări acest calcul în cazul unei bare prismatice solicitate la șoc longitudinal (axial) - fig. 18.4.

Folosind relațiile (18.9,c), (18.22) și (18.24) succesiv vom avea:

$$\Delta_{st} = \frac{N \cdot \ell}{EA} = \frac{P\ell}{EA};\ \psi = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2hEA}{P\ell}};$$

$$\sigma_d = \psi\frac{N}{A} = \psi\frac{P}{A} = \sqrt{\frac{2hEA}{P\ell}} \cdot \frac{P}{A} \le R.$$

La limită, în baza relației de mia sus vom avea:

$$\frac{2hEA}{P\ell} \cdot \frac{P^2}{A^2} = R^2 \quad \text{sau} \quad \frac{2h \cdot E \cdot A\ell}{P \cdot A^2\ell^2} \cdot P^2 = \frac{2hEP}{A\ell} = R^2,$$ din care se obține

$$(A\ell)_{nec} = V_{nec} = \frac{2hEP}{R^2} \tag{18.25}$$

Având volumul necesar, dimensiunile secțiunii transversale și lungimea barei trebuiesc astfel adoptate încât comportarea elementului la acțiunea șocului să fie cât mai favorabilă (se va avea în vedere că un element rigid se comportă mai defavorabil decât unul elastic - mai zvelt).

18.5 SOLICITĂRI DINAMICE CU ACCELERAȚIE VARIABILĂ ÎN TIMP (VIBRAȚIILE SISTEMELOR ELASTICE)

Dacă un element de construcție este scos din poziția sa de echilibru de o cauză perturbatoare (lovituri, variație în timp a mărimii unei încărcări aplicate etc), acesta va executa o serie de mișcări în jurul poziției inițiale de echilibru numite *vibrații*.

Așa spre exemplu, bara elastică din figura 18.5,a, scoasă din poziția de echilibru de o forță P și lăsată liberă va căuta să revină la poziția inițială executând o serie de vibrații în jurul poziției de echilibru stabil. Un punct curent m al

barei va executa deci *mişcări oscilatorii*, de regulă periodice şi cu acceleraţie variabilă.

Distanţa de la o poziţie oarecare a punctului m, în timpul oscilaţiilor, până la poziţia de echilibru se numeşte *elongaţie*, fiind notată cu y.

Elongaţia maximă, respectiv distanţa dintre o poziţie extremă şi poziţia de echilibru poartă denumirea de *amplitudine* a oscilaţiei, notată cu A (fig. 18.5).

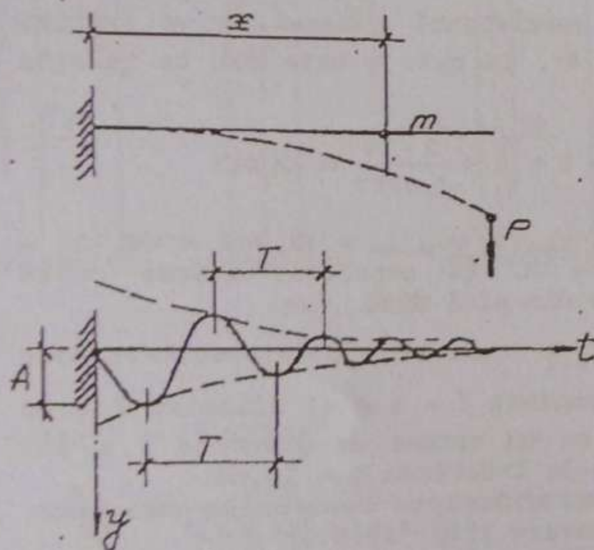


Fig. 18.5

Timpul în care sistemul oscilant revine la aceeaşi poziţie, după ce a trecut o dată printr-un ciclu întreg de oscilaţie reprezintă *perioada* mişcării care se notează uzual cu T şi se măsoară în secunde.

Inversul perioadei, respectiv numărul de oscilaţii ce se produc într-o secundă se numeşte frecvenţă a oscilaţiei şi se notează cu f, deci

$$f = \frac{1}{T} \tag{18.26}$$

Numărul de vibraţii executate de sistem în 2π secunde, notat cu ω poartă numele de *pulsaţie proprie* dată de relaţia

$$\omega = 2\pi f \tag{18.27}$$

Dacă forţa perturbatoare P (fig. 18.5,a) îşi încetează acţiunea după scoaterea barei din poziţia de echilibru, vibraţiile barei se vor produce liber (*vibraţii libere*) iar dacă ea va acţiona continuu, vibraţiile sistemului vor fi *forţate*. O serie de cauze fizice cum sunt frecările interioare, frecările cu aerul etc., au ca efect frânarea vibraţiilor libere până la stingerea lor totală - fenomenul poartă numele de *amortizarea vibraţiilor*.

Dacă asupra unui sistem oscilant ce efectuează vibraţii libere se aplică o forţa variabilă periodic numită *forţă de excitaţie*, aceasta va imprima sistemului o mişcare periodică care se compune cu mişcarea oscilatorie proprie producând o aşa-zisă *mişcare oscilatorie forţată*. Dacă perioadele şi direcţiile celor două mişcări sunt aceleaşi, prin propunerea efectelor, amplitudinea oscilaţiilor tinde să crească foarte mult (indefinit), dând naştere aşa-numitului *fenomen de rezonanţă*, deosebit de periculos în construcţii.

În timpul vibraţiei corpul elastic poate lua diferite poziţii deformate, numite *forme proprii de vibraţie*.

Calculul construcţiilor şi elementelor de construcţie la solicitări dinamice cu acceleraţii variabile în timp prezintă o multitudine de aspecte teoretice şi particularităţi practice care fac obiectul unei discipline distincte - Dinamica construcţiilor.

Exemplul 18.6.1

Se cere să se verifice dacă asupra unei grinzi realizate dintr-un profil I_{20} poate cădea un corp având greutatea G = 100 daN, de la înălţimea h = 30 cm (fig.18.6,a). Se dă R = 2100 daN/cm^2 şi E = 2,1x10^6 daN/cm^2.

Rezolvare

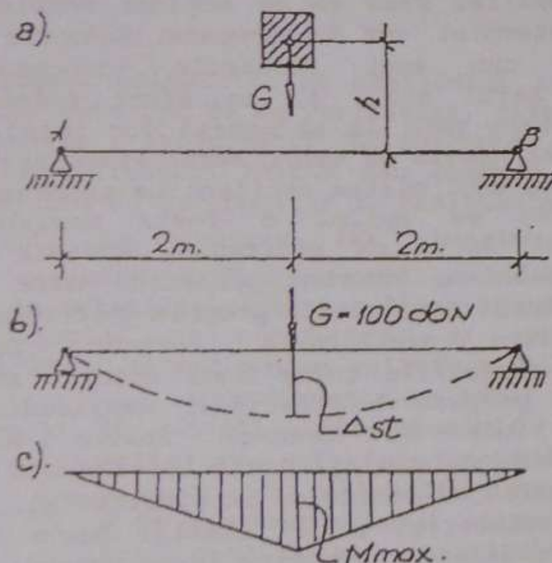


Fig. 18.6

Din Anexa 5 pentru profilul I_{20} rezultă I_y = 2140 cm^4, W_y = 214 cm^3. Aplicând static o forţă G pe grindă (fig. 18.6,b) aceasta va produce momentul încovoietor M, dat de relaţia (7.8) şi săgeata f_{max} = Δ_{st} dată de relaţia (12.24), prin urmare

$$M_{max} = \frac{G\ell}{4} = \frac{100 \times 400}{4} = 10000 \text{ daN cm}$$

$$\Delta_{st} = \frac{G\ell^3}{48EI_y} = \frac{100 \times (400)^3}{48 \times 2,1 \times 10^6 \times 2140} = 0,0297 \text{ cm}$$

În secţiunea periculoasă a barei, din acţiunea statică va lua naştere tensiunea

$$\sigma_{st,max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{10000}{214} = 46,729 \text{ daN / cm}^2.$$

Condiţia de rezistenţă a barei se va exprima prin ecuaţia (18.8), în care ψ este dat de relaţia (18.21):

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 25}{0,0297}} = 42,043$$

Cu aceasta $\sigma_d = \sigma_{max} = \psi\sigma_{st,max}$ = 42,043 × 46,729 = = 1965 daN/cm^2 < R, în concluzie grinda poate prelua încărcarea dinamică dată.

Exemplul 18.6.2

O bară de lungimea ℓ = 1 m şi diametru d = 50 mm, este lovită cu un berbec de greutate P = 800 daN, care cade de la înălţimea h = 19 mm.

Se cere să se calculeze tensiunile din bară, în următoarele ipoteze (fig. 18.6.7)

a) bara are diametrul constant d = 50 mm;

b) bara este strunjită pe o lungime ℓ_1 = 10 cm la diametrul d_1 = 45 mm;

c) bara este strunjită pe toată lungimea la diametrul d_1.

Rezolvare

Efectele acţiunii dinamice a încărcării se calculează cu relaţia (18.9), în care ψ se va calcula distinct pentru cele 3 situaţii a, b şi c, funcţie de deformaţia axială a barei.

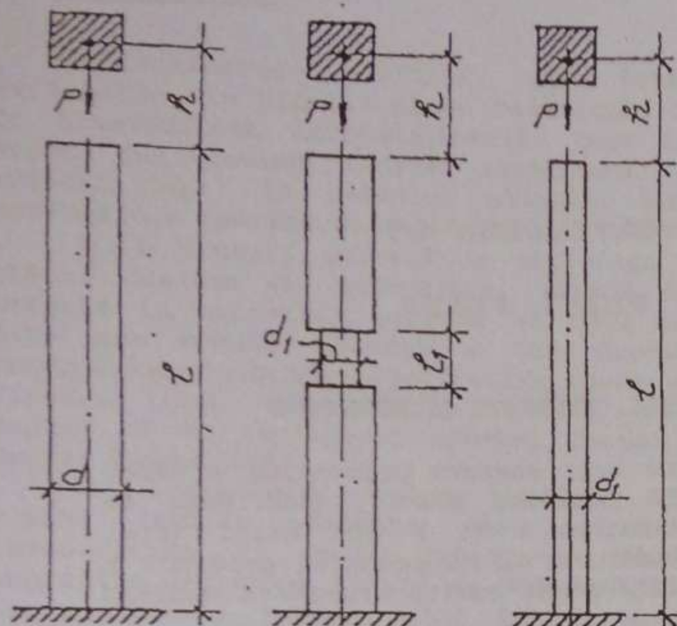


Fig. 18.7

a) Bară cu diametrul d = 50 mm:

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 19,635\,\text{cm}^2$$

$$\Delta_{st} = \frac{N \cdot \ell}{EA} = \frac{800 \times 100}{2,1 \times 10^6 \times 19,635} = 0,00194 \text{ cm}$$

$$\psi = \ell + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 1,90}{0,00194}} = 45,269$$

$$\sigma_{st} = \frac{N}{A} = \frac{820}{19,635} = 40,744\,\text{daN}/\text{cm}^2$$

$$\sigma_d = \sigma_{max} = \psi\sigma_{st} = 45,269 \cdot 40,744 =$$
$$= 1844\,\text{daN}/\text{cm}^2 < R = 2100\,\text{daN}/\text{cm}^2$$

b) Bara strunjită pe lungimea ℓ_1 (fig. 18.7,b)

$$A = 19,635\ \text{cm}^2;\ A_1 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 15,904\,\text{cm}^2$$

$$\Delta_{st} = \frac{N}{E}\left(\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell - \ell_1}{A}\right) = \frac{800}{2,1 \times 10^6}\left(\frac{10}{15,904} + \frac{90}{19,635}\right) = 0,0199 \text{ cm}$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1,90}{0,00199}} = 44,710$$

În secţiunea brută a barei, de arie A, tensiunile din acţiunea dinamică a forţei vor fi:

$$\sigma_d = \sigma_{max} = 44,71 \times 40,744 = 1822\ \text{daN/cm}^2 < R$$

iar în secţiunea slăbită, de arie A_1 vom avea

$$\sigma_{max} = \psi\frac{N}{A_1} = 44,71 \times \frac{800}{15,904} =$$
$$= 2249\,\text{daN}/\text{cm}^2 > R = 2100\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

c) Bară strunjită pe toată lungimea

Dacă bara este strunjită pe toată lungimea la diametrul d_1 (fig. 18.7,c)

$$\Delta_{st} = \frac{N \cdot \ell}{EA_1} = \frac{800 \times 100}{2,1 \times 10^6 \times 15,904} = 0,00240 \text{ cm}$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 1,90}{0,0024}} = 40,804$$

$$\sigma_d = \sigma_{max} = 46,196 \cdot \frac{800}{15,904} = 2053\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}_2} < R\,2100\text{daN/cm}^2$$

Rezultatele obținute mai sus reliefează că slăbirile locale de secțiune nu influențează defavorabil asupra tensiunilor. Pe măsura creșterii deformațiilor Δ_{st}, coeficienții ψ se reduc, diminuând efectul dinamic al forței. Se observă că bara strunjită numai pe 10 cm (fig. 18.7,b) nu satisface condiția de rezistență, în timp ce bara strunjită pe toată lungimea (fig. 18.7,c) înregistrează din aceeași solicitare, tensiuni inferioare tensiunii de calcul R.

CAPITOLUL 19

PLĂCI PLANE

19.1 DEFINIȚII. TENSIUNI ȘI EFORTURI

Plăcile plane sunt corpuri prismatice a căror înălțime h numită *grosimea plăcii*, este mică în raport cu dimensiunile a și b ale bazei (fig. 19.1,a). Locul geometric al mijloacelor grosimii h formează o suprafață plană numită ***suprafață mediană a plăcii***.

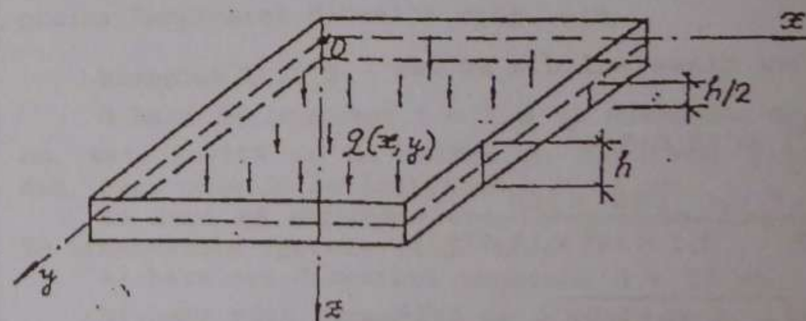


Fig. 19.1

Pentru a forma structuri statice, plăcile sunt fixate pe contur sau intermediar continuu sau în puncte, prin reazeme de tip încastrare, articulație sau reazem simplu. Grosimea lor poate fi constantă sau variabilă.

Spre deosebire de cel al barelor, *studiul plăcilor* este mult mai complex și nu poate fi făcut cu metodele Rezistenței Materialelor necesitând folosirea instrumentului matematic mai riguros al Teoriei Elasticității.

Determinarea stărilor de tensiune și deformație din plăcile plane constituie o problemă de elasticitate tridimensională, care tratată în acest fel devine foarte complicată. Urmare a acestui fapt, în calculul plăcilor sunt admise următoarele *ipoteze de calcul* simplificatoare:

1. O dreaptă normală la suprafața mediană a plăcii înainte de deformație, rămâne dreaptă și normală la suprafața mediană și după deformație. Este așa numita ipoteză a lui Kirchhoff care generalizează ipoteza secțiunilor plane de la bare (ipoteza lui Bernoulli). Ipoteza sintetizează faptul că se neglijează efectul forței tăietoare asupra încovoierii.

2. Distanțele dintre punctele situate în planul median înainte de deformare rămân nemodificate și după deformare. Altfel spus, suprafața mediană a plăcii se deformează dar rămâne inextensibilă, jucând rolul fâșiei neutre de la încovoierea barei drepte.

3. Tensiunile normale în sensul perpendicularei la planul median, sunt neglijabile în raport cu celelalte tensiuni din același plan (median).

Raportând placa la un sistem de referință cartezian Oxyz, cu axele x și y conținute în planul median și axa z normală pe acesta (fig. 19.1), în baza ipotezei 3 rezultă $\sigma_z = 0$. Din ipoteza inextensibilității planului median (z=0), rezultă

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0 \qquad (20.1)$$

Această ipoteză este însă valabilă numai atunci când deformațiile transversale ale plăcii w sunt mici în raport cu grosimea ei h, orientativ

$$w < \frac{h}{5} \qquad (19.2)$$

La rândul lor, ipotezele (1) și (2) sunt valabile numai în cazul plăcilor cu grosime mică în

raport cu celelalte două dimensiuni ale acestora, cu aproximație,

$$h \le \frac{\ell_{min}}{5(10)} \qquad (19.3)$$

în care ℓ_{min} = min{a,b} reprezintă latura cea mai mică a plăcii. În baza ipotezelor de mai sus, starea de tensiune pe fețele văzute ale unui element infinitezimal prismatic de dimensiuni dx, dy, h, detașat dintr-o placă prin secționarea ei cu două perechi de plane paralele planelor xOz și yOz, așa cum este ea pusă în evidență de Teoria Elasticității, este arătată în figura 19.2,a.

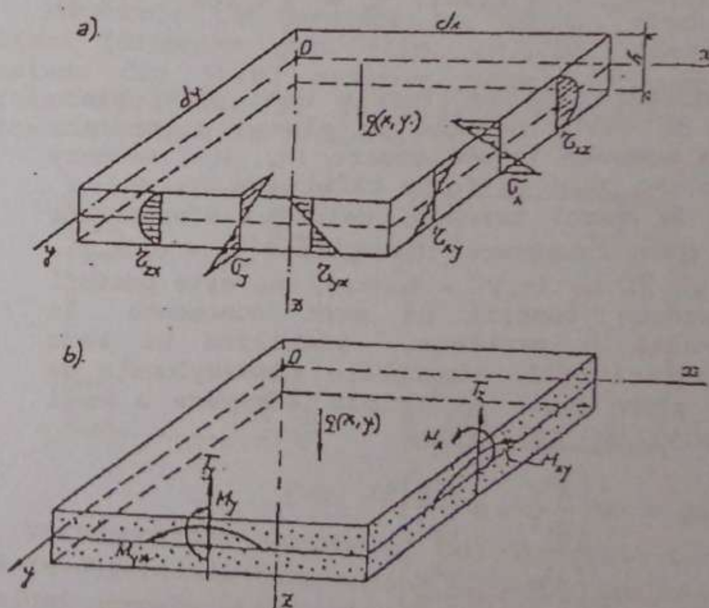


Fig. 19.2

Reducând tensiunile indicate în raport cu planul median al plăcii pe câte o lungime unitară

se obţin:

- în secţiunea x

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz; \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz; \quad T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} z dz \quad (19.1)$$

- în secţiunea y:

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz; \quad T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} z dz \quad (19.2)$$

Prin normare, în secţiunile unei plăci plane solicitate de forţe normale pe planul ei median, iau naştere momente încovoietoare (M_x, M_y), momente de torsiune (M_{xy}, M_{yx}) şi forţe tăietoare (T_x, T_y).

Ca şi în cazul barelor, calculul eforturilor secţionale prin integrarea funcţiilor $\sigma_x = \sigma_x(x,y)$, $\sigma_y = \sigma_y(x,y)$ şi $\tau_{xy}(x,y) = \tau_{yx}(x,y)$ nu este posibil întrucât aceste funcţii nu sunt cunoscute. În soluţia exactă a problemei, stabilită pe baza Teoriei Elasticităţii, eforturile susmenţionate se calculează prin dublă şi triplă derivare a unei funcţii $W(x,y)$, cu relaţiile:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (19.3)$$

$$T_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$$

$$T_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)$$

în care, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ reprezintă *rigiditatea la încovoiere a plăcii*, numită şi *rigiditate cilindrică* iar $W(x,y)$ o funcţie ce exprimă deplasările punctelor plăcii pe direcţia z, care trebuie să satisfacă condiţiile de contur şi să verifice ecuaţia

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{2(x,y)}{D} \quad (19.4)$$

stabilită de Sophie Germain în 1815, numită *ecuaţia diferenţială a plăcilor plane*. Utilizată în scopul calculului eforturilor, funcţie $w(x,y)$ joacă rolul de *funcţie rezolvantă*.

Având în vedere că o secţiune făcută printr-o placă are o lungime mare, în comparaţie cu secţiunea normală printr-o bară, eforturile secţionale la plăci (M_x, M_y, $M_{xy} = M_{yx}$, T_x, T_y) variază de-a lungul secţiunii. Din acest motiv, ele se calculează pe unitatea de lungime, altfel spus pe secţiuni dreptunghiulare având baza unitară şi înălţimea *h*.

Efectele momentelor încovoietoare M_x, M_y şi a forţelor tăietoare T_x şi T_y în secţiunile plăcii sunt cele cunoscute la grinzi.

Momentele de torsiune $M_{xy} = M_{yx}$ produc în secţiuni tensiunile $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ iar la colţurile plăcii forţe concentrate, egale în mărime cu intensitatea momentelor, M_{xy} şi respectiv M_{yx}. Prezenţa acestora se pune uşor în evidenţă printr-o operaţie de echivalenţă statică simplă (fig. 19.3).

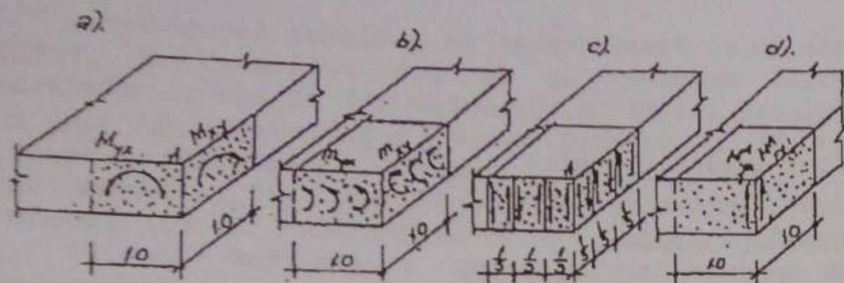


Fig. 19.3

Pentru o mai ușoară înțelegere, vom considera un colț de placă A, și fâșiile unitare aferente acestuia, în secțiunile cărora acționează momentele de torsiune $M_{xy}^{(A)} = M_{yx}^{(A)}$ (fig. 19.3,a). Înlocuind aceste momente cu un număr finit de cupluri $m_{xy} = m_{yx} = \frac{M_{xy}}{n}$ (în figura 19.3,b, s-a luat n=3) se obține un sistem static echivalent cu cel inițial. La rândul lor, cuplurile m_{xy} și m_{yx} sunt echivalente cu sistemele de forțe $T = M_{xy}^{(A)} = M_{yx}^{(A)}$, arătate în figura (19.3,c) care se anulează două câte două, mai puțin cele de colț (fig. 19.3,d) care dau naștere unei forțe rezultante

$$\mathcal{T} = M_{xy}^{(A)} + M_{yx}^{(A)} \qquad (19.4)$$

ce are tendința de ridicare a colțului de placă. O situația cu totul similară se produce în toate colțurile plăcii. Prezența forțelor concentrate la colțuri se verifică experimental, încărcând cu o sarcină uniform distribuită q o placă dreptunghiulară simplu rezemată (fig. 19.4,a).

În practică se iau măsuri constructive de ancorare a colțurilor plăcii, dacă acestea nu sunt menținute la poziție prin acțiunea unor forțe liniar distribuite transmise de pereți. Atunci când marginile adiacente colțului sunt încastrate,

forțele $\mathcal{T}$ date de relația (19.4) sunt nule deoarece pe laturi de contur încastrate, momentele de torsiune sunt nule.

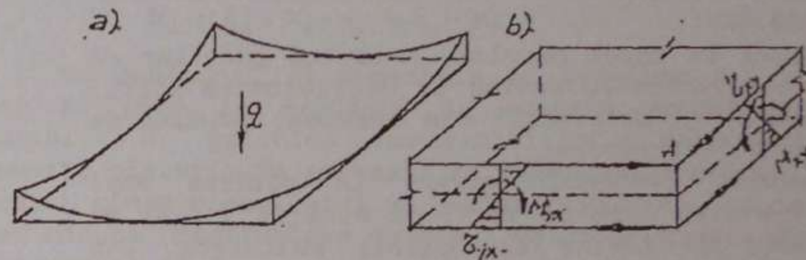


Fig. 19.4

Momentele de torsiune M_{xy} și M_{yx} produc la colțuri forfecare pură (fig. 19.4,b). Starea de tensiune din jurul acestor puncte, situate la partea superioară și inferioară a plăcii, este arătată în figurile 19.5,a și b.

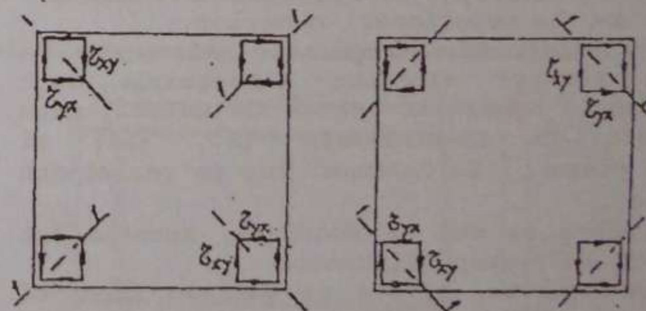


Fig. 19.5

Corespunzător acesteia, pe direcții la 45° față de direcțiile tensiunilor $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ iau naștere tensiuni normale principale de întindere σ_1. Pentru preluarea acestora, plăcile de beton ale planșeelor de clădiri trebuie armate suplimentar cu bare dispuse pe direcția 1-1 a acestora pe o zonă limitată a colțului (fig. 19.5).

19.2 METODE DE CALCUL A PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE

Ca și în cazul barelor, calculul plăcilor ca elemente structurale revine la determinarea stării de eforturi și deformații din acestea, produse de încărcările exterioare.

Soluția problemei constă în găsirea unei funcții w(x,y) care să verifice ecuația (19.3) și condițiile de contur ale plăcii calculate. Din punct de vedere matematic, aceasta revine la integrarea ecuației diferențiale (19.3) cu condiții la limită. Operația este însă dificilă, fiind posibilă doar în câteva cazuri particulare de alcătuire, încărcare și rezemare a plăcii. Pentru cazurile oarecare, problema integrării ecuației (19.3) este practic imposibilă de rezolvat analitic exact, motiv pentru care se apelează la soluții aproximative sau la soluționări numerice.

Studii și cercetări riguroase efectuate în timp asupra acestor elemente structurale sunt concretizate prin numeroase metode de calcul, date în literatura de specialitate {3}, {13} și utilizate în prezent, în calculul lor de rezistență și rigiditate.

Deși diverse ca mod de abordare, acestea pot fi clasificate în 3 grupe distincte.

a) *Metode exacte*, bazate pe găsirea funcției rezolvante w(x,y). Sunt cunoscute din această grupă:

- soluții elementare prin polinoame;
- soluții prin serii de funcții (puteri);
- soluții prin serii trigonometrice simple sau duble;

b) *Metode aproximative variaționale*, bazate pe principiile variaționale ale Teoriei Elasticității. Din grupa acestora pot fi menționate:

- metoda abaterii medii pătratice minime;
- metoda ortogonalizării (Galerkin);
- metoda Reyleigh - Ritz;
- metoda Kantorovici-Krâlov;
- metoda colocației;

c) *Metode aproximative numerice*

- metoda diferențelor finite;
- metoda elementelor finite;
- metoda fâșiilor (Marcus);

Din gama largă a acestora, specificată mai sus, în paragraful 19.3 se prezintă modul de utilizare a metodei fâșiilor în calculul plăcilor dreptunghiulare - metodă ușor de aplicat, apropiată de metodele Rezistenței Materialelor.

19.3 METODA FÂȘIILOR ÎN CALCULUL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE REZEMATE PE CONTUR

Fie o placă dreptunghiulare oarecare, încărcată cu o forță q uniform distribuită, acționând normal pe planul medial al acesteia. Placa se consideră împărțită fictiv în fâșii paralele cu laturile ei, Ox și Oy (fig. 19.6)

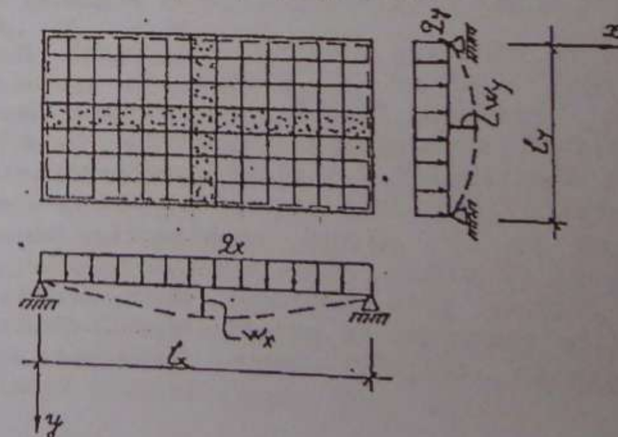


Fig. 19.6

Încărcarea totală q se repartizează celor două fâşii, o fracţiune din ea q_x revenind fâşiei paralele cu axa Ox iar diferenţa q_y fâşiei paralele cu axa Oy. Presupunând pentru început că fâşiile lucrează independent, forţele q_x şi q_y se determină din condiţia ca săgeţile celor două fâşii, în punctul lor de intersecţie să fie egale. Notând cu w_x şi w_y deplasările menţionate, acestea şi încărcările susmenţionate aferente celor două fâşii, vor satisface în fiecare punct relaţiile:

$$\begin{cases} w_x = w_y \\ q_x + q_y = q \end{cases} \qquad (19.5)$$

Soluţia sistemului de ecuaţii (19.5) are forma

$$\begin{aligned} q_x &= \varkappa q \\ q_y &= (1 - \varkappa q) = \rho q \end{aligned} \qquad (19.6)$$

în care $\varkappa$ ţine cont de natura rezemărilor plăcii şi este exprimat obişnuit în funcţie de raportul laturilor acestora $\lambda = \dfrac{\ell_y}{\ell_x}$. Cu q_x şi q_y astfel determinaţi se calculează momentele M_x' şi M_y' de fâşie (grindă) pe fiecare direcţie.

$$\begin{aligned} M_x' &= \frac{1}{\eta_x} q_x \ell_x^2 \\ M_y' &= \frac{1}{\eta_y} q_y \ell_y^2 \end{aligned} \qquad (19.7)$$

Aceste momente sunt însă supraevaluate, deoarece s-a considerat că fâşiile lucrează independent, neţinând seama de efectul conlucrării acestora, exprimat prin coeficientul contracţiei transversale şi prin prezenţa momentelor de torsiune. Având în vedere aceste efecte, valorile momentelor

reale M_x şi M_y se vor corecta prin multiplicarea momentelor M_x' şi M_y' cu un coeficient subunitar ξ, diferenţiat pe cele două direcţii (ξ_x, ξ_y):

$$M_x = \xi_x \cdot M_x' ; M_y = \xi_y \cdot M_y' \qquad (19.8)$$

De menţionat că momentele de torsiune M_{xy} nu pot fi puse în evidenţă cu această metodă de calcul. În practica construcţiilor, exceptând anumite situaţii de rezemare şi încărcare a plăcii, aceste momente sunt mici şi pentru preluarea lor se iau măsuri constructive de tipul celor precizate în paragraful 19.1.

Cu notaţiile $\lambda = \dfrac{\ell_y}{\ell_x}$; $q_x = \varkappa q$; $q_y = (1 - \varkappa) q = \rho q$

coeficienţii $\varkappa$, momentele necorectate M_x' şi M_y', factorii de corecţie ξ şi momentele corectate, în câmp şi pe reazeme, au valorile indicate mai jos, funcţie de modul de rezemare al fâşiilor.

a) *Placa rezemată pe tot conturul* (fig. 19.7)

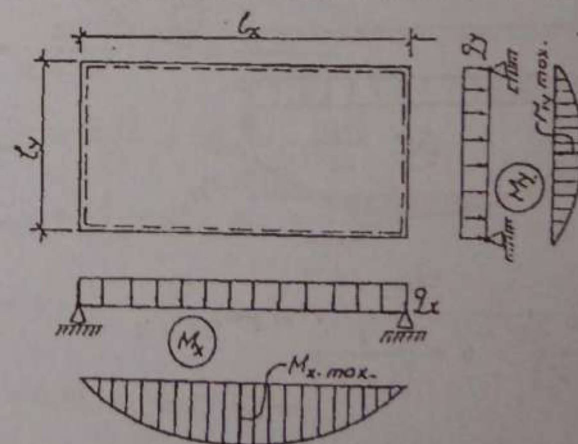


Fig. 19.7

$$\varkappa = \frac{\lambda^4}{\left(1+\lambda^4\right)};\ \rho = \frac{1}{\left(1+\lambda^4\right)};\ M_{x,max} = \frac{q_x \ell_x^2}{8};$$

$$M'_{y,max} = \frac{q_y \ell_y^2}{8}$$

$$\xi_x = \xi_y = \xi = \varphi - \frac{5}{6}\cdot\frac{\lambda^2}{1+\lambda^4}$$

$$M_{x,max} = \xi M'_{x\,max};\ M_{y,max} = \xi M'_{y\,max}$$

b. Placa încastrată pe tot conturul (fig. 19.8)

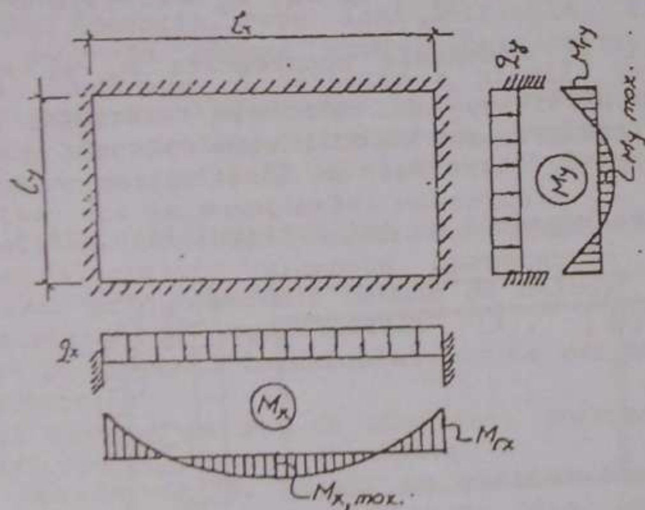


Fig. 19.8

$$\varkappa = \frac{\lambda^4}{\left(1+\lambda^4\right)};\ \rho = \frac{1}{\left(1+\lambda^4\right)}$$

$$M'_{rx} = -\frac{1}{12} q_x \ell_x^2;\ M'_{ry} = -\frac{1}{12} q_y \ell_y^2$$

$$M'_{x,max} = \frac{1}{24} q_x \ell_x^2;\ M'_{y,max} = \frac{1}{24} q_y \ell_y^2$$

$$\xi_x = \xi_y = \xi = 1 - \frac{5}{18}\cdot\frac{\lambda^2}{1+\lambda^4}$$

$$M_{rx} = \xi M'_{rx};\ M_{x,max} = \xi M'_{x,max}$$

$$M_{ry} = \xi M'_{ry};\ M_{y,max} = \xi M'_{y,max}$$

c) Placa încastrată pe două laturi adiacente și simplu rezemată pe celelalte două (fig. 19.9)

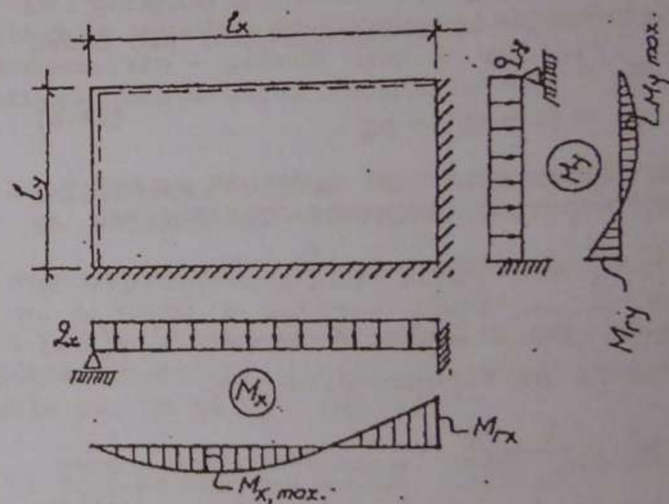


Fig. 19.9

$$x = \frac{\lambda^4}{\left(1+\lambda^4\right)};\ \rho = 1\left(1+\lambda^4\right);$$

$$M'_{x,max} = \frac{9}{128} q_x \ell_x^2;\ M'_{rx} = -\frac{q_x \ell_x^2}{8}$$

$$M'_{y,max} = \frac{9}{128} q_y \ell_y^2;\ M'_{ry} = -\frac{q_y \ell_y^2}{8}$$

$$\xi_x = \xi_y = \xi = \frac{15}{32} \cdot \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}$$

$$M_{rx} = \xi M'_{rx} \; ; \; M_{x,max} = \xi M'_{x,max}$$

$$M_{ry} = \xi M'_{ry} \; ; \; M_{y,max} = \xi M'_{y,max}$$

d) *Placă încastrată pe o latură și simplu rezemată pe cele trei laturi* (fig. 19.10)

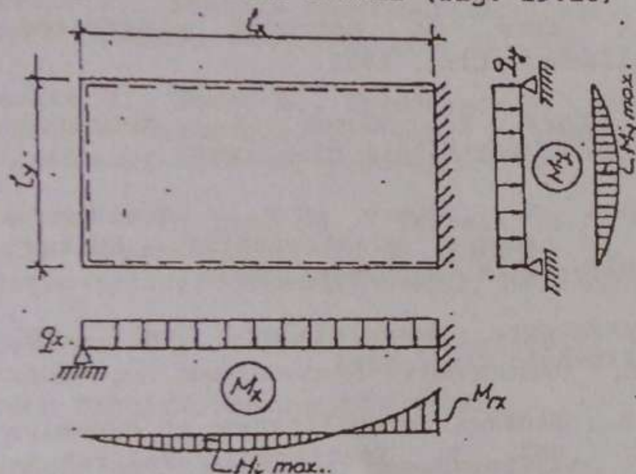


Fig. 19.10

$$\kappa = \frac{5\lambda^4}{2 + 5\lambda^4} \; ; \; \rho = \frac{2}{2 + 5\lambda^4}$$

$$M'_x = \frac{9}{128} q_x \ell_x^2 \; ; \; M'_{rx} = -\frac{1}{8} q_x \ell_x^2$$

$$M'_{y,max} = \frac{q_y \ell_y^2}{8} ;$$

$$\xi_x = 1 - \frac{75}{32} \cdot \frac{\lambda^2}{2 + 5\lambda^4} ; \; \xi_y = 1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{\lambda^2}{2 + 5\lambda^4}$$

$$M_x = \xi_x M'_x \; ; \; M_{rx} = \xi_x M'_{rx} ;$$

$$M_{y,max} = \xi_y M'_{y,max}$$

e) *Placa încastrată pe trei laturi și simplu rezemată pe cea de-a treia* (fig. 19.11)

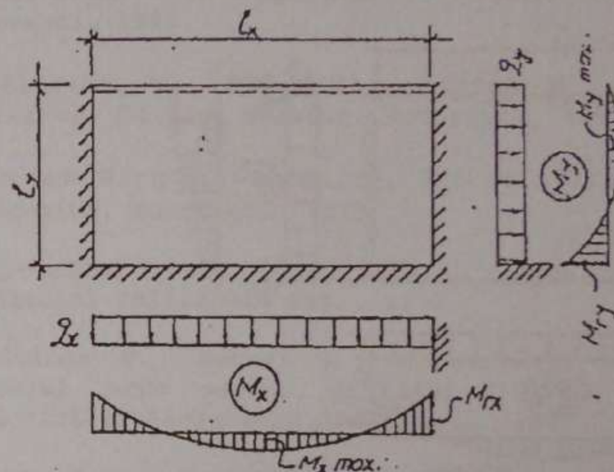


Fig. 19.11

$$\kappa = \frac{2\lambda^4}{1 + 2\lambda^4} \; ; \; \rho = \frac{1}{1 + 2\lambda^4}$$

$$M'_{x,max} = \frac{q_x \ell_x^2}{24} \; ; \; M'_{rx} = -\frac{q_x \ell_x^2}{12}$$

$$M'_{y,max} = \frac{9}{128} q_y \ell_y^2 ; \; M'_{ry} = -\frac{q_y \ell_y^2}{8}$$

$$\xi_x = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{\lambda^2}{1 + 2\lambda^4} ; \; \xi_y = 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{\lambda^2}{1 + 2\lambda^4}$$

$$M_x = \xi_x M'_x \; ; \; M_{rx} = \xi_x M'_{rx} ;$$

$$M_{y,max} = \xi_y M'_{y,max} ; \; M_{ry} = \xi_y M'_{ry}$$

f) Placa încastrată pe două laturi opuse și simplu rezemate pe celelalte două (fig. 19.12)

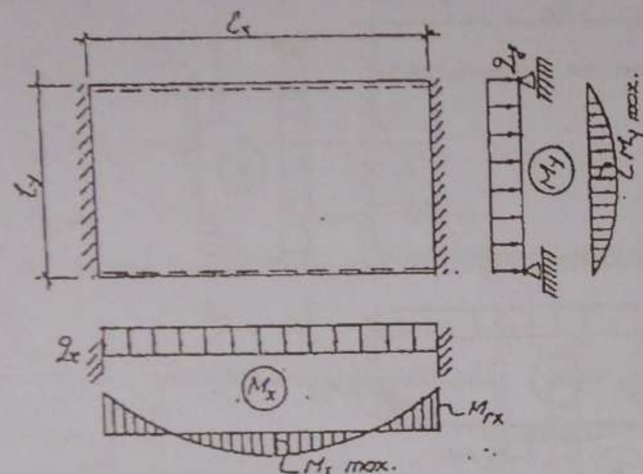


Fig. 19.12

$$\varkappa = \frac{5\lambda^4}{1+5\lambda^4}\ ;\ \rho = \frac{1}{1+5\lambda^4};\ q_x = \varkappa q\ ;\ q_y = \rho q$$

$$M'_{x,max} = \frac{q_x \ell_x^2}{24}\ ;\ M'_{rx} = -\frac{q_x \ell_x^2}{12};\ M'_{y,max} = \frac{q_y \ell_y^2}{8};$$

$$\xi_x = 1 - \frac{25}{18}\cdot\frac{\lambda^2}{1+5\lambda^4};\ \xi_y = 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{\lambda^2}{1+5\lambda^4}$$

$$M_{x,max} = \xi_x M'_{x,max}\ ;\ M_{rx} = \xi_x M'_{rx};\ M_{y,max} = \xi_y M'_{y,max};$$

BIBLIOGRAFIE

1. Bârsan G.M., *Curs de mecanică teoretică*, Institutul Politehnic Cluj, 1970.
2. Bârsan G.M., Borş, I., Alexa, P., *Mecanica-statică*, Institutul Politehnic Cluj, 1983.
3. Bia C., Ille V., Soare M.V., *Rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
4. Bia C., *Rezistenţa materialelor*, vol. II, Institutul Politehnic Cluj, 1988.
5. Cătărig A. ş.a., *Statica, stabilitatea şi dinamica construcţiilor*, vol. I, Institutul Politehnic Cluj, 1981.
6. Diaconu M., *Rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii. Noţiuni teoretice şi metodologice, exerciţii de învăţământ programat, culegere de probleme*, vol. I, 1987, vol. II, 1985, Institutul Politehnic Iaşi.
7. Diaconu M., Gorbănescu D., *Rezistenţa materialelor*, vol. III şi IV, Institutul Politehnic Iaşi, 1990.
8. Ille V., Bia C., *Rezistenţa materialelor*, vol. I, Institutul Politehnic Cluj, 1980.

9. Ille V., *Rezistența materialelor*, vol. II, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1981.

10. Ille V., Bia C., Cocoveş C., Petrina P., Panțel E., Marțian I., Câmpeanu A., Ioani A., *Rezistența materialelor, Culegere de probleme*, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1987.

11. Mazilu P., *Statica construcțiilor*, vol. I şi II, Editura Tehnică, Bucureşti 1955 şi 1959.

12. Mazilu P., Posea N., Iordănescu E., *Probleme de rezistența materialelor*, vol. I 1969, vol. II 1975, Editura Tehnică, Bucureşti.

13. Mazilu P., Țopa N., Ieremia M., *Aplicarea teoriei elasticității şi a plăcilor în calculul construc-țiilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

14. Mateescu D., Caraba I., *Construcții metalice. Calculul şi proiectarea elementelor din oțel*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

15. Mühsam H., *Mecanica construcțiilor*, vol. I, 1974, vol. II, 1975, Institutul Politehnic, Cluj-Napoca.

16. Panțel E., Ioani A., *Lecții de rezistența materialelor I*, Editura Napoca STAR, 2002.

17. Răutu S., Bănuț V., *Statica construcțiilor, Curs*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

18. Răutu S., Bănuț V., *Statica construcțiilor, Culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

19. Soare M.V., Ille V., Bia C., *Rezistența materialelor în aplicații*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996.

20. Vâlcovici V., Bălan St., Voinea R., *Mecanica teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

21. Voinea R. ş.a., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

22. Precupanu D., *Rezistența construcțiilor*, Institutul Politehnic Iaşi, 1983.

23. Siminea P., Negrei L., *Construcții metalice, Calculul prin metoda stărilor limită*. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

24. Popa A.G., *Rezistența materialelor, Îndrumător de lucrări*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1998.

ARHIMAR s.r.l.

Birou de proiectare Arhitectură şi Urbanism



Anexa 1

UNITĂŢI DE MĂSURĂ

1. Unităţi de măsură ale sistemului internaţional (SI)

1. Pentru forţă: Newton (N) - Un Newton reprezintă forţa necesară pentru a imprima corpului cu masa unitară o acceleraţie egală cu 1 $m\ s^{-2}$

2. Prefixe pentru formarea multiplilor şi submultiplilor

Factor de multiplicare	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}
Prefixul	giga	mega	kilo	hecto	deca	deci	centi	mili	micro
Simbolul prefixului	G	M	k	h	da	d	c	m	μ

3. Unităţi de măsură diferite de unităţile SI utilizate frecvent

Mărimea	Unitatea de măsură			
	Denumire	Simbol	Sistemul de unităţi din care face parte	Echivalentul în unitatea SI
Lungime	inch(ţol) foot yard milă	in ft yd mile	FPS FPS FPS FPS	$2{,}54 \cdot 10^{-2}$ m 0,3048 m 0,9144 m $1{,}6093 \cdot 10^{3}$ m
Arie	square inch square foot	in^2 ft^2	FPS FPS	$6{,}45161 \cdot 10^{-4}$ m $9{,}2903 \cdot 10^{-2}$ m
Acceleraţie	gal	Gal	CGS	10^{-3} m/s^2
Masa	pound quintal short ton ton(long ton) tonă	lb q sh tn ton t	FPS - - -- -	0,453592 kg 10^2 kg $9{,}07185 \cdot 10^{2}$ kg $1{,}01605 \cdot 10^{3}$ kg 10^3 kg

Mărimea	Unitatea de măsură			
	Denumire	Simbol	Sistemul de unităţi din care face parte	Echivalentul în unitatea SI
Forţă	dyna	dyn	CGS	10^{-5} N
	poundel	pdl	FPS	0,130255 N
	pound force	lbf	–	4,44822 N
	kilograme forţă	kgf	MKfS	9,80665 N ≅ 10 N
	short ton force	sh tnf	–	$8,89644 \cdot 10^{3}$ N
	long ton force	tonf	–	$9,96402 \cdot 10^{3}$ N
	tonă forţă	tf	–	$9,80665 \cdot 10^{3}$ N ≅ ≅ 10^{4} N
Presiune, tensiune mec.	pascal	Pa	MKS	1 N/m²
	poundal per square foot	pdl/ft²	FPS	1,48816 N/m²
	kilogram forţă pe metru pătrat	kgf/m²	MKfS	9,80665 N/m² ≅ ≅ 10 N/m²
	dynă pe cm² (baryl)	dyn/cm² (baryl)	CGS	10 N/m²
	pound force per square inch	lbf/in²	–	$6,89476 \cdot 10^{3}$ N/m²
	atmosferă tehnică	at	–	9,80665 N/m²
	ton force per square inch	tonf/in²	–	$1,5474386 \cdot 10^{8}$ N/m²
Lucru mecanic energie	erg	erg	CGS	10^{-7} J
	foot-poundal	ft.pdl	FPS	$4,21401 \cdot 10^{-2}$ J
	foot-pound force	ft.lbf	–	1,35582 J
	kilogram forţă metru	kgfm	MKfS	9,80665 J ≅ 10 J
	kilowatt-oră	kWh	–	$3,6 \cdot 10^{6}$ J
	cal putere-oră	CP.h	–	$2,6478 \cdot 10^{6}$ J

CGS – centimetru-gram-secundă
MKfS – metru-kilogram forţă-secundă (sistemul tehnic)
FPS – foot-pound-sec (Absolut System of Units-ASU)
MKS – metru-kilogram-secundă

Anexa 2

REZISTENŢE DE CALCUL ŞI ADMISIBILE

Rezistenţe pentru construcţii civile, industriale şi agricole din oţel (STAS 10108/0—78) în daN/cm²

Specificaţia	Simbol	Coeficient aplicat faţă de R	Marca oţelului	
			OL 37	OL 52
A. Produse laminate				
Rezistenţa normală	R^n	—	2 300	3 500
Rezistenţa de calcul				
— întindere, compr., încovoiere	R	—	2 100	3 000
— forfecare	R_f	0,6	1 200	1 800
B. Cordoane de sudură				
Îmbinări cap la cap, solicitate la				
— compresiune	R^s_c	1,0	2 100	3 000
— întindere	R^s_t	0,8	1 700	2 400
— forfecare	R^s_f	0,6	1 300	1 800
Îmbinări de colţ, solicitate la forfecare	R^s_f	0,7	1 500	2 100
C. Îmbinări nituite cu nituri din			OL 34	OL 44
— forfecare	R^n_f	0,8	1 700	2 200
— presiune pe pereţii găurii	R^n_p	2,0	4 200	6 000
D. Îmbinări bulonate, cu şuruburi păsuite din grupa			(4.6)	(6.6)
— forfecare	R^b_f	0,8	1 700	2 400
— presiune pe pereţii găurii	R^b_p	2,0	4 200	6 000
— întindere în tijă	R^b_t	0,8	1 700	2 400
E. Îmbinări bulonate, cu şuruburi brute				
— forfecare	R^b_f	0,6	1 300	1 800
— presiune pe pereţii găurii	R^b_p	1,6	3 400	4 500
— întindere în tijă	R^b_t	0,8	1 700	2 400

Anexa 3

Caracteristici pentru profilul cornier cu aripi egale

STAS 424-71 Cuprins: STAS 424-80	PROFIL CORNIER CU ARIPI EGALE Dimensiuni, mase, valori statice	Lungimi fixe 4 + 12 m	Calități (Vl. 3)	Exemplu de notare pe desen pentru a = 80 mm; t = 8 mm; (= 10725 rece) L 80 × 8 ... 10725

I = momentul de inerție
W = modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de girație

Raportate la axa de încovoiere respectivă.

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii, mm: a	t	r	r_1	Aria secțiunii A cm²	Masa liniară kg/m	Distanța axelor, cm: e	w
20 × 20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41
× 4		4			1,46	1,14	0,64	
25 × 25 × 3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	1,77
× 4		4			1,85	1,45	0,76	
× 5		5			2,26	1,77	0,80	
30 × 30 × 3*	30	3	5	2,5	1,74	1,36	0,84	2,12
× 4		4			2,27	1,78	0,88	
× 5		5			2,78	2,18	0,92	
35 × 35 × 3*	35	3	5	2,5	2,04	1,60	0,96	2,47
× 4		4			2,67	2,09	1,00	
× 4		5			3,28	2,57	1,04	
40 × 40 × 3*	40	3	6	3	2,35	1,84	1,07	2,83
× 4		4			3,08	2,42	1,12	
× 5		5			3,79	2,97	1,16	
45 × 45 × 4*	45	4	7	3,5	3,49	2,74	1,23	3,18
× 5		5			4,30	3,38	1,28	
× 6		6			5,08	4,00	1,32	
50 × 50 × 4*	50	4	7	3,5	3,89	3,06	1,36	3,54
× 5		5			4,80	3,77	1,40	
× 6		6			5,69	4,47	1,45	
× 7		7			6,56	5,15	1,49	
60 × 60 × 5	60	5	8	4	5,82	4,57	1,64	4,24
× 6		6			6,91	5,42	1,69	
× 8		8			9,03	7,09	1,77	
× 10		10			11,10	8,69	1,85	
70 × 70 × 6	70	6	9	4,5	8,13	6,38	1,93	4,95
× 7		7			9,40	7,38	1,97	
× 8		8			10,60	8,36	2,01	
× 9**		9			11,80	9,34	2,05	
× 10		10			13,10	10,3	2,09	

Mărimile statice pentru axele de încovoiere

v_1	v_2	Y – Y; Z – Z: $J_y = I_z$ cm⁴	$W_y = W_z$ cm³	$i_y = i_z$ cm	U – U: I_u cm⁴	i_u cm	V – V: I_v cm⁴	W_v cm³	i_v cm
0,84	0,70	0,39	0,28	0,59	0,61	0,74	0,16	0,19	0,38
0,90	0,71	0,41	0,36	0,58	0,77	0,73	0,21	0,23	0,38
1,03	0,87	0,80	0,45	0,75	1,26	0,94	0,33	0,32	0,48
1,05	0,89	1,01	0,58	0,74	1,60	0,63	0,43	0,40	0,45
1,13	0,91	1,20	0,71	0,73	1,99	0,91	0,52	0,46	0,45
1,18	1,04	1,40	0,65	0,90	2,23	1,13	0,55	0,49	0,58
1,24	1,05	1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58
1,30	1,07	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,92	0,70	0,57
1,36	1,23	2,29	0,90	1,06	3,63	1,34	0,95	0,70	0,63
1,42	1,24	2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,88	0,68
1,48	1,25	3,58	1,43	1,04	5,64	1,31	1,45	1,01	0,67
1,32	1,40	3,45	1,18	1,21	5,46	1,52	1,44	0,96	0,78
1,58	1,40	4,47	1,55	1,21	7,09	1,52	1,85	1,17	0,78
1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,60	1,51	2,26	1,37	0,77
1,75	1,57	6,43	1,97	1,36	10,2	1,71	2,67	1,33	0,87
1,81	1,58	7,84	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,50	0,87
1,87	1,59	9,16	2,88	1,34	14,5	1,69	3,82	2,04	0,87
1,92	1,75	8,97	2,46	1,52	14,2	1,91	3,72	1,94	0,95
1,98	1,76	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,54	2,39	0,97
2,01	1,77	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	3,33	2,61	0,97
3,10	1,78	14,6	4,16	1,49	23,1	1,88	6,10	2,91	0,96
2,32	2,11	19,4	4,45	1,82	30,7	2,30	8,03	3,45	1,17
2,33	2,11	22,8	6,29	1,83	36,2	2,29	9,43	3,95	1,17
2,50	2,14	29,2	6,09	1,80	46,1	2,26	12,1	4,86	1,16
2,61	2,17	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,3	5,07	1,16
2,73	2,46	36,9	7,27	2,13	53,5	2,68	15,2	5,59	1,37
2,79	2,47	42,4	8,41	2,12	67,1	2,67	17,5	6,27	1,36
2,85	2,49	47,5	9,32	2,11	73,3	2,66	19,7	6,91	1,36
2,90	2,50	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36
2,96	2,52	57,2	11,7	2,09	90,5	2,63	23,9	5,09	1,35

Caracteristici pentru profilul cornier cu aripi egale

Conform: STAS 424-71 / STAS 424-80	PROFIL CORNIER CU ARIPI EGALE Dimensiuni, mase, indici statici	Lungimi fixe 4 ÷ 12 m	Calități OL 37	Exemplu de notare pe desen: pentru a = 60 mm; s = 5 mm, l = 10775 mm; L 50 × 5 ... 10775

I = momentul de inerție
W = modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de girație

Raportate la axa de încovoiere respectivă.

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii, mm: a	s	r	r_1	Aria secțiunii A cm²	Masa unitară kg/m	Distanțe axe, cm: e	w	v_1	v_2	Mărimile statice pentru axele de încovoiere: Y–Y1, Z–Z: $I_y = I_z$ cm⁴	$W_y = W_z$ cm³	$i_y = i_z$ cm	U–U: I_u cm⁴	i_u cm	V–V: I_v cm⁴	W_v cm³	i_v cm
80 × 80 × 6	80	6	10	5	9,35	7,36	2,17	5,66	3,07	2,82	55,8	9,57	2,44	88,5	3,05	23,1	7,33	1,56
× 8		8			12,30	9,63	2,26		3,15	2,82	72,2	12,6	2,43	115	3,06	29,8	8,30	1,55
× 10		10			15,10	11,9	2,34		3,30	2,83	87,5	15,4	2,41	139	3,03	36,3	11,0	1,55
90 × 90 × 8	90	8	11	5,5	13,90	10,9	2,50	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	166	3,45	43,1	12,2	1,76
× 9		9			15,50	12,2	2,54		3,59	3,18	116	18,0	2,74	[illegible]	3,45	47,8	13,3	1,76
× 10*		10			17,10	13,4	2,58		3,65	3,26	129	21,1	2,74	204	3,43	52,5	14,4	1,75
× 11		11			18,70	14,7	2,62		3,70	3,21	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
100 × 100 × 8	100	8	12	6	15,5	12,2	2,74	7,07	3,87	3,52	145	19,9	3,06	230	3,85	59,8	15,4	1,96
× 10		10			19,2	15,0	2,82		3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,82	72,5	18,3	1,95
× 12		12			22,7	17,8	2,90		4,11	3,57	207	29,1	3,02	328	3,80	85,7	20,9	1,91
120 × 120 × 10	120	10	13	6,5	23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36
× 12		12			27,5	21,6	3,40		4,80	4,26	368	42,7	3,65	584	4,60	151	31,5	2,35
130 × 130 × 12	130	12	14	7	30,0	23,6	3,64	9,19	5,15	4,60	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
× 14		14			34,7	27,2	3,72		5,26	4,63	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
× 16		16			39,3	30,9	3,80		5,37	4,66	603	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52
140 × 140 × 12	140	12	15	7,5	32,5	25,5	3,90	9,90	5,50	5,04	602	59,7	4,31	957	5,43	245	44,9	2,75
× 14		14			37,6	29,4	3,98		5,61	5,07	689	68,0	4,30	1 093	5,42	284	50,5	2,74
× 16		16			42,2	37,3	4,20		5,90	5,09	772	79,1	4,28	1 230	5,40	314	61,5	2,72
150 × 150 × 12*	150	12	16	8	34,8	27,3	4,12	10,6	5,83	5,29	737	67,7	4,60	1 170	5,80	303	52,0	2,95
× 14		14			40,3	31,6	4,21		5,93	5,31	845	78,2	4,58	1 340	5,77	347	58,3	2,94
× 16		16			45,7	35,9	4,25		6,07	5,34	949	88,7	4,56	1 510	5,74	391	64,4	2,93
× 18		18			51,0	40,1	4,37		6,17	5,38	1 050	99,3	4,54	1 670	5,71	433	70,4	2,92
160 × 160 × 12	160	12	17	8,5	37,4	29,7	4,39	11,3	6,19	5,74	913	78,6	4,94	1 450	6,21	376	60,3	3,17
× 14		14			43,3	34,0	4,47		6,30	5,77	1 016	90,0	4,92	1 662	6,20	431	68,1	3,16
× 16		16			49,1	38,5	4,55		6,42	5,79	1 175	103,0	4,89	1 866	6,17	485	75,3	3,14
× 18		18			54,8	43,0	4,63		6,53	5,82	1 299	114,0	4,87	2 061	6,13	537	82,1	3,13

Anexa 4

Caracteristici pentru profilul U

Laminate STAS 564-71 / STAS 564-78	PROFIL U. Dimensiuni, masa, mărimi statice.

Lungimi fixe: 6 ÷ 12 m	Calitate: OL 37	Exemplu de notare pe desen pentru h = 120 mm; l = 1 250 mm: U12...1 250

h – înălțimea profilului
t – grosimea medie a tălpilor
R – raza de rotunjire interioară a tălpilor
r – raza de rotunjire a tălpilor la vîrf
I – momentul de inerție
W – modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – raza de girație
} raportate la axa de încovoiere respectivă
S_y – momentul static al semisecțiunii
e_z – distanța axei $Z-Z$ de la marginea exterioară a inimii
b – lățimea tălpilor
d – grosimea inimii

Simbol U	h (mm)	b (mm)	d (mm)	t (mm)	R (mm)	r (mm)	Aria secțiunii A cm²	Masa liniară kg/m
6,5	65	42	5,5	7,5	7,5	4,0	9,03	7,09
8	80	45	6	8,0	8,0	4,0	11,0	8,64
10	100	50	6	8,5	8,5	4,5	13,5	10,6
12	120	55	7	9,0	9,0	4,5	17,0	13,4
14	140	60	7	10,0	10,0	5,0	20,4	16,0
16	160	65	7,5	10,5	10,5	5,5	24,0	18,8
18	180	70	8	11,0	11,0	5,5	28,0	22,0
20	200	75	8,5	11,5	11,5	6,0	32,2	25,3
22	220	80	9	12,5	12,5	6,5	37,4	29,4
24	240	85	9,5	13,0	13,0	6,5	42,3	33,2
26	260	90	10	14,0	14,0	7,0	48,3	37,9
30	300	100	10	16,0	16,0	8,0	58,8	46,2

Mărimi statice pentru axele de încovoiere: Y–Y			Z–Z					
I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	I_z cm⁴	W_z cm³	i_z cm	S_y cm³	e_y cm	Simbol U
57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	—	1,42	6,5
106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30

Anexa 5

Caracteristici pentru

Conform STAS 565-71 STAS 565-80	PROFIL I Dimensiuni, mase, mărimi statice

Inclinația 14%

Simbol I	Dimensiuni, mm					Aria secțiunii A cm²	Masa teoretică liniară kg/m
	h	b	t	d = R	r		
8	80	42	5,90	3,9	2,3	7,58	5,95
10	100	50	6,80	4,5	2,7	10,6	8,32
12	120	58	7,70	5,1	3,1	14,2	11,2
14	140	66	8,60	5,7	3,4	18,3	14,4
16	160	74	9,50	6,3	3,8	22,8	17,9
18	180	82	10,40	6,9	4,1	27,9	21,9
20	200	90	11,30	7,5	4,5	33,5	26,3
22	220	98	12,20	8,1	4,9	39,6	31,1
24	240	106	13,10	8,7	5,2	46,1	36,2
26	260	113	14,10	9,4	5,6	53,4	41,9
28	280	119	15,20	10,1	6,1	61,1	48,0
30	300	125	16,20	10,8	6,5	69,1	54,2
32	320	131	17,30	11,5	6,9	77,8	61,1
36	360	143	19,50	13,0	7,8	97,1	76,2
40	400	155	21,60	14,4	8,6	118	92,6

Lungimi fixe: 4 + 12 m	Calități: OL 37	Exemplu de notare pe desen: pentru h = 220 mm; l = 1 250 mm I 22....1250

h — înălțimea profilului
d — grosimea inimii
R — raza de rotunjire interioară a tălpilor
r — raza de rotunjire a tălpilor la vârf
I — momentul de inerție
W — modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ — raza de girație

(Raportate la axa de încovoiere respectivă)

S_y — momentul static al semisecțiunii
b — lățimea tălpilor
t — grosimea medie a tălpilor

Mărimi statice pentru axele de încovoiere						S_y cm³	Simbol I
Y – Y			Z – Z				
I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	I_z cm⁴	W_z cm³	i_z cm		
77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
573	81,9	5,61	35,2	10,71	1,40	47,7	14
935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
19610	1 090	14,2	818	114,0	2,90	635	36
29210	1 460	15,7	1 160	149,0	3,13	857	40

Anexa 6

OŢEL ROTUND Diametre, secţiuni şi mase	Conform STAS 333-71

Diametrul d mm	Abateri limită mm	Aria secţiunii A cm²	Masa teoretică kg/m	Diametrul d mm	Abateri limită mm	Aria secţiunii A cm²	Masa teoretică kg/m
12	+0,4 −0,3	1,13	0,89	60	+0,8 −1,1	28,3	22,2
13		1,33	1,04	(63)		31,2	24,5
14		1,54	1,21	65		33,2	26,1
15		1,77	1,39	70		38,5	30,2
16		2,01	1,58	75		44,2	34,7
17		2,27	1,78	80	+0,8 −1,3	50,3	39,5
18		2,54	2,00	85		56,7	44,5
19		2,84	2,23	90		63,6	49,5
20		3,14	2,47	95		70,9	55,6
21		3,46	2,72	100	+1,2 −1,7	78,5	61,1
22		3,80	2,98	(105)		86,6	68,0
(23)		4,15	3,26	110		95,0	74,6
24		4,52	3,55	115	+1,4 −2,0	104	81,5
25		4,91	3,85	120		113	88,8
26	+0,5 −0,7	5,31	4,17	(125)		123	96,3
27		5,73	4,49	130		133	104
28		6,16	4,83	(135)		143	112
(29)		6,60	5,18	140		154	121
30		7,07	5,55	(145)		165	130
32		8,04	6,31	150		177	139
34		9,08	7,13	(155)	+1,7 −2,5	189	148
35		9,62	7,55	160		201	158
36		10,2	7,99	170		227	178
38		11,3	8,90	180		254	200
40		12,6	9,89	190		284	223
42		13,9	10,9	200		314	247
45		15,9	12,5	210	+2,5 −3,0	346	272
48		18,1	14,5	220		380	298
50	+0,7 −1,0	19,6	15,4	230		415	316
(52)		21,2	16,7	240		452	355
53		22,1	17,3	250		491	385
(55)		23,8	18,7	270		572	449
56		24,6	19,3	300		706	555
(58)		26,4	20,7				

Lungimi fixe: 2–6 m	Calitate: STAS 500-76	Exemplu de notare pe desen: pentru $d=20$ mm; $l=5\,000$ mm Ø 20 ... 5 000

Anexa 7

Conform STAS 404/1,2-71 (extras)	ŢEVI DIN OŢEL FĂRĂ SUDURĂ LAMINATE LA CALD Dimensiuni, valori statice	Lungimi fixe: 4–12,5 m	Calitate: STAS 2881-74	Exemplu de notare pe desen: pentru $D=60$; $t=5$ mm; $l=7\,520$ mm Ţeavă 60×5...7 520

$A=(D^2-d^2)\frac{\pi}{4}$ — aria secţiunii

$I=(D^4-d^4)\frac{\pi}{64}$ — momentul de inerţie

$W=\frac{2I}{D}=(D^4-d^4)\frac{\pi}{32D}$ — modulul de rezistenţă

$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{1}{4}\sqrt{D^2+d^2}$ — raza de giraţie

$G=A\times l\times\gamma$, masa pe metru

pentru A în cm²; $l=1$ m $=100$ cm şi

$\gamma=7,85$ kg/dm³ $=0,00785$ kg/cm³

$G=A\cdot 100\cdot 0,00785=A\cdot 0,785$ (kg/m)

Diametrul exterior D mm	A (cm²), I (cm⁴)	Grosimea peretelui t, mm: 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	7,0	8,0	9,0	10	11	12	14	16	18	20
		Mărimile statice A (cm²) şi I (cm⁴)																	
42	A	3,10	3,66	4,23	4,78	5,30	5,81	6,31	6,79	7,70	8,56	9,33	10,0	—	—	—	—	—	—
	I	6,07	7,03	7,91	8,71	9,45	10,1	10,7	11,3	12,3	13,0	13,7	14,1	—	—	—	—	—	—
(44,5)	A	3,30	3,91	4,51	5,09	5,65	6,20	6,74	7,26	8,25	9,17	10,0	10,8	—	—	—	—	—	—
	I	7,30	8,46	9,54	10,5	11,5	12,3	13,1	13,8	15,0	16,0	16,8	17,5	—	—	—	—	—	—
48	A	3,57	4,24	4,89	5,53	6,15	6,75	7,34	7,92	9,02	10,0	11,0	11,2	—	—	—	—	—	—
	I	9,28	10,8	12,2	13,5	14,7	15,8	16,9	17,8	19,5	20,9	22,1	23,0	—	—	—	—	—	—
51	A	3,81	4,52	5,22	5,91	6,57	7,23	7,86	8,48	9,65	10,8	11,9	12,9	13,8	14,7	—	—	—	—
	I	11,2	13,1	14,8	16,4	17,9	19,3	20,6	21,9	24,0	25,8	27,4	28,7	29,9	30,6	—	—	—	—
54	A	—	4,81	5,55	6,28	7,00	7,70	8,38	9,05	10,3	11,6	12,7	13,8	14,9	15,8	—	—	—	—
	I	—	15,7	17,8	19,8	21,6	23,3	25,0	26,5	29,2	31,5	33,5	35,1	36,6	37,7	—	—	—	—
57	A	—	5,09	5,85	6,66	7,42	8,17	8,90	9,61	11,0	12,3	13,6	14,7	15,9	16,9	—	—	—	—
	I	—	18,6	21,1	23,5	25,8	27,9	29,8	31,7	35,0	37,9	40,5	42,8	44,4	58,0	—	—	—	—
60	A	—	5,37	6,21	7,04	7,85	8,64	9,42	10,2	11,7	13,1	14,4	15,7	17,0	18,1	20,3	—	—	—
	I	—	21,9	24,9	27,7	30,4	32,9	35,3	37,6	41,8	45,2	48,3	51,0	53,4	55,4	58,5	—	—	—

Anexa 8

Nituri	Diametrul de calcul, mm	13	(15)	17	(19)	21	(23)	25	(28)
	Diametrul nominal, mm	12	(14)	16	(18)	20	(22)	24	(27)

Şuruburi păsuite	Tipul şurubului	M12	M16	M20	M22	M24	M27	M30
	Diametrul tijei (de calcul) mm	13	17	21	23	25	28	31
	Diametrul net în zona filetată, mm	9,9	13,5	16,0	18,9	20,4	23,2	25,6

Anexa 9

Alegerea diametrului maxim pentru şuruburi şi nituri

Elementul care se îmbină şi dimensiunea caracteristică	Valoarea dimensiunii caracteristice în mm pentru diametrul maxim de nit d egal cu					
	d = 13	17	21	23	25	28
t, $t_1>t$	4 - 6	7-8	9-12	10-14	13-18	>18
h	40-45	50-60	70	80	90-130	140-160
h	80-100	120-140	160-180	200-220	240-300	-
h	180-220	240-280	300-320	360-400	-	-

Anexa 10

h/b	1,00	1,50	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Anexa 11

Săgeţi admisibile f_a

Nr. crt.	Denumirea elementelor de construcţie	f_a/l	Conform
0	1	2	3
	A. Construcţii civile, industriale şi agricole		STAS 10108/0-78
1	Grinzile căilor de rulare cu inimă plină sau cu zăbrele pentru:		
	a) poduri rulante manuale	1/500	
	b) poduri rulante electrice cu capacitatea de ridicare $Q \leq 500$ kN	1/600	
	c) poduri rulante electrice cu capacitatea de ridicare $Q > 500$ kN	1/750	
2	Căile de rulare ale grinzilor rulante	1/500	
3	Căile de rulare pentru cărucioare rulante	1/400	
4	Grinzile platformelor clădirilor industriale:		
	a) cînd nu susţin linii ferate sau utilaje care produc vibraţii:		
	— grinzi principale	1/400	
	— celelalte grinzi	1/250	
	b) cînd susţin căi ferate înguste	1/400	
	c) cînd susţin căi ferate cu ecartament normal	1/600	
5	Grinzile planşeelor dintre etaje:		
	a) grinzi principale	1/350	
	b) celelalte grinzi	1/250	
6	Grinzile acoperişului şi planşeelor podurilor clădirilor:		
	a) ferme, grinzi principale şi grinzi care susţin cadre de luminător	1/250	
	b) pane şi căpriori	1/200	
7	Elementele şarpantei, pereţilor şi luminătoarelor:		
	a) bare verticale şi rigle	1/200	
	b) şprosurile ferestrelor (în plan vertical şi orizontal)	1/150	
	c) stîlpii pereţilor cînd materialul de închidere este elastic (tablă, azbociment, materiale plastice)	1/200	
8	Panouri metalice de învelitoare:		
	a) în zone fără aglomerări de zăpadă	1/150	
	b) în zone cu aglomerări de zăpadă	1/100	
9	Tabla platelajului la platformele industriale	1/150—1/200	
10	Estacade de conducte:		
	a) la grinzi principale	1/350	
	b) la grinzi secundare	1/300	

Anexa 12

Coeficienţii de zvelteţe admisibili λ.

Sistemul de rezistenţă		Elementele	Bare comprimate
1		2	3
Pane	Cu zăbrele	Tălpi	120
		Diagonale şi montanţi	150
	Armate cu vergele şi montanţi	Tălpi	120
		Diagonale	200
		Montanţi	150
Ferme		Tălpi, diagonale şi montanţi de reazem	120[1]
		Celelalte bare ale fermelor	150
		Elementele barelor compuse	50
Suprastructuri	Sistem trapezoidal	Rigle	100
		Diagonale	
		Montanţi	150
	Sistem M	Rigle şi montanţi	150
	Sistem pe trei rezemare	Tălpi	120
		Diagonale şi montanţi	150
Stâlpi	Fustă		100
	Principali – Inimă plină		120
	Principali – Cu zăbrele	Ramuri	120
		Zăbrele	150
		Elementele barelor compuse	50
	Secundari		150

Anexa 13

Valori ale coeficientului de profil $k = \frac{\lambda^2}{I}$

Tipul de secţiune	L	I laminat	U	I sudat	Chesson	Țeavă dreptunghiulară	Țeavă rotundă			I
k_x	5,07	h<20: 0,580; h>20: 0,480	h<20: 0,60; h>20: 0,50	h<20: 1,200; h>20: 1,000	h<20: 1,200; h>20: 1,000	$26\frac{l}{h}$	$28\frac{l}{D}$	1,50	h<20: 1,75; h>20: 1,20	0,435
k_y	1,72	h<30: 0,650; h>30: 1,100	7,00	h<20: 6,700; h>20: 7,600	1,900	$26\frac{l}{h}$	$28\frac{l}{D}$		h<20: 1,80; h>20: 1,20	1,400

Anexa 14

Coeficienţii φ şi ξ pentru oţel OL 37 $\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}} = l_f\sqrt{\frac{kR}{N}}$

Tipul secţiunii	- Tuburi laminate la cold; - Profile I care flambează în plan paralel cu inima		- Chesoane sudate; - Profile I care flambează în plan paralel cu tălpile; - Profile deschise, flambaj în plan perpendicular pe axa de simetrie		- Profile deschise, flambaj în plan paralel cu axa de simetrie	
λ	φ	ξ	φ	ξ	φ	ξ
0	1.000	0.000	1,000	0.000	1.000	0.000
10	0,997	10.015	0.996	10.020	0.992	10,414
20	0,939	20,110	0,983	20,172	0,969	20,317
30	0,974	30,397	0,960	30,618	0,931	31,918
40	0,952	40,996	0,927	41,545	0,881	42,619
50	0,921	52,100	0,883	53,209	0,821	55,182
60	0,879	63,996	0,829	65,898	0,755	69,052
70	0,826	77,020	0,764	80,085	0,686	84,515
80	0,762	91,645	0,694	96,030	0,619	101,682
90	0,690	108,347	0,622	114,116	0,555	120,808
100	0.616	127.411	0.552	134.595	0,496	141,990
110	0,546	148,866	0,488	157,464	0,443	165,268
120	0,482	172,845	0,432	182,574	0,396	190,692
130	0,426	199,176	0,382	210,335	0,355	218,187
140	0,377	228,011	0,339	240,451	0,318	248,264
150	0,335	259,160	0,303	272,502	0,286	280,484
160	0,299	292,606	0,271	307,351	0,259	314,391
170	0,268	328,383	0,244	344,154	0,234	351,431
180	0,242	365,902	0,220	383,761	0,213	390,016
190	0,219	406,005	0,199	425,919	0,195	430,265
200	0,199	448,335	0,181	470,100	0,178	474,045

Anexa 15

LUNGIMI DE FLAMBAJ. GRINZI CU ZĂBRELE

Destinația construcției: Construcții industriale, hidrotehnice și poduri metalice

Direcția de flambaj	Elementul: Tălpi	Diagonale și montanți de reazem	Celelalte zăbrele
	l_f		
În planul grinzii	l	l	$\geq 0,8\,l$
Transversal planului grinzii	l_1	l	l

În care: l este lungimea elementului între nodurile teoretice de la capetele sale,
l_1 — distanța între nodurile fixate împotriva deplasării transversale ale planului grinzii

Bara cu capetele 1 și 2 împiedicate să se deplaseze transversal planului grinzii și solicitate de N_1 și N_2; $N_1 > N_2$

Schema grinzii	Lungimea de flambaj în plan și transversal planului grinzii
	În planul grinzii: $l_f = l_2$
	Transversal planului grinzii: $l_f = l_1\left(0,75 + 0,25\frac{N_2}{N_1}\right)$; N_1 și N_2 se introduc cu semnele lor

Schema grinzii	Lungimi de flambaj: În planul grinzii	În plan transversal planului grinzii: Caracteristica nodurilor de intersecție a diagonalelor	Felul solicitărilor în barele care se opun flambajului: Întindere	Efort nul	Compresiune
	l_1	Ambele diagonale neîntrerupte	$0,5\,l$	$0,7\,l$	l
		Bara care se opune flambajului este întreruptă și barele sînt legate între ele cu guseu	$0,7\,l$	[illegible]	l

Notă: Pentru alte cazuri a se consulta STAS 10108/0-78; STAS 1011-76 etc.